半単純 Lie 群の standard 表現入門

—— $Sp(2,\mathbb{R})$ と $SU(2,2)$ を中心に ——

西山 享 (京都大学・総合人間学部)
Kyo NISHIYAMA

この論説においては G を実半単純 (あるいは簡約型) の連結な行列群とする。ただしここに述べられている結果のうち大半のものはもっと広いクラスの Lie 群に対して成立する。 G としては具体的には $SL(n,\mathbb{R}), Sp(n,\mathbb{R})$ または $SU(p,q)$ などを想定してもらえばよい。このうち階数が 2 である次のふたつの群を主な例にして以下解説する。

$$SU(2,2) = \{g \in SL(4,\mathbb{C}) |\ g^* I_{2,2} g = I_{2,2}\},\ I_{2,2} = \begin{pmatrix} 1_2 & \\ & -1_2 \end{pmatrix}$$

$$Sp(2,\mathbb{R}) = \left\{g \in SL(4,\mathbb{R}) |\ {}^t g J g = J\right\},\ J = J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ -1_2 & 0 \end{pmatrix}$$

特に Part I で一般論を述べたあとは、 Part II で $G = SU(2,2)$ に話を限って具体的に述べる。読者によっては Part II から見たほうが有益なことがあるかもしれない。またなにぶん紙数が限られているのですべてのものに厳密な定義を与えるわけにはいかないと思うが、その場合には [redbook], [greenbook], [darkgreenbook] [Warner] などを参照していただきたい。

尚、**筆者の計算ミスにより講演当日に述べた結果には重大な誤りがあった**(本文、定理 4.5 及び定理 6.2 参照)。お詫びするとともにこの論説において訂正することでお許しいただければ幸いである。

Part I. Harish-Chandra 加群の分類と standard 表現 (概観)

1 Langlands(-Knapp-Zuckerman) classification

表現の分類理論にとって「誘導表現 (induced representation)」という道具はなくてはならないものである。名前の通り、これは一種の帰納法 (induction) であり、より小さな群の既知の表現から大きな群の未知の表現を作りだす方法を与えている。とくに半単純群の表現論においては放物型部分群からの誘導表現が扱われることが多い。この誘導表現について簡単に見ておこう。

$P \subset G$ を**放物型部分群**として $P = MAN$ をその Langlands 分解とする ([redbook, §V.5] 参照)。このとき M は簡約型で中心はコンパクト、 A はベクトル群、 N はべき単部分群になっている。

Example 1.1 $G = Sp(2,\mathbb{R})$ において

$$P = \left\{ g \in G \;\middle|\; g = \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0_2 & * \end{array}\right) \right\}$$

とおくと P は放物型部分群[1]になり、その Langlands 分解は

$$M = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & \\ \hline & {}^tA^{-1} \end{array} \right) \middle| \; A \in SL^{\pm}(2,\mathbb{R}) \right\} \simeq SL^{\pm}(2,\mathbb{R}),$$

$$A = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} a1_2 & \\ \hline & a^{-1}1_2 \end{array} \right) \middle| \; a \in \mathbb{R}_+^{\times} \right\} \simeq \mathbb{R}_+^{\times},\ N = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 1_2 & * \\ \hline & 1_2 \end{array} \right) \in G \right\}$$

で与えられる。

いま (σ, V_σ) を M のユニタリ表現とし、 e^ν ($\nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* = (\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ の複素双対空間$)$) を A のユニタリとは限らない一次元表現、 $e^{\rho(\log a)} = \sqrt{\det \mathrm{Ad}\, a|_{\mathfrak{n}}}$ ($a \in A$) とおく。このとき

$$(\pi, V) = \mathrm{Ind}_P^G\ \sigma \otimes e^\nu \otimes 1_N$$

を次のように定義する。まず表現空間を

$$V = \{ f : G \to V_\sigma |\ f|_K \in L^2(K, V_\sigma), f(gman) = \sigma(m)^{-1} e^{-(\nu+\rho)(\log a)} f(g) \quad (man \in MAN) \}$$

と定義し、表現の作用素を左移動で決める。

$$\pi(g_0) f(g) = f(g_0^{-1} g)\ (g_0, g \in G)$$

このようにして得られる表現 (π, V) が放物型部分群からの誘導表現であり、 V は V_σ の内積と K 上の L^2 内積によって自然にヒルベルト空間になり、さらに e^ν がユニタリ、つまり $\nu \in \sqrt{-1}\ \mathfrak{a}'$ ならば (π, V) は自然にユニタリ表現になる[2]。したがって $\nu \in \sqrt{-1}\ \mathfrak{a}'$ であるとき「ユニタリな誘導表現」と呼ぶことにしよう。ただし $\mathfrak{a}'$ は $\mathfrak{a}$ の**実**双対空間を表わす。

p-adic group	$\cdots$	cuspidal 表現は parabolic induction に現れない、したがって既約表現の分類のためには基本的な表現である。
real group	$\cdots$	任意の既約 admissible な表現は極小放物型部分群からの誘導表現に部分表現として現れる。(Subrepresentation Theorem [Harish-Chandra 54], [Casselman-Miličić])

しかし放物型部分群からのユニタリな誘導表現のみを考えるとこの状況は違ったものになる。つまり

$$\begin{pmatrix} \text{放物型部分群からのユニタ} \\ \text{リな誘導には現れない表現} \end{pmatrix} = (\text{離散系列表現 (DS = discrete series)})$$

となっている。ここで**離散系列表現** (DS) とは $L^2(G)$ 上の部分表現として実現されるような表現、言い替えれば行列要素が $L^2(G)$ に属するような表現のことを言う ([redbook, Chapter IX])。したがって実半単純 Lie 群の表現を考えるとき離散系列表現は基本的である。

離散系列表現の「極限」[3]を **limits of discrete series** (LDS) と呼ぶ。LDS はユニタリかつ tempered な既約 admissible 表現である。LDS は一般に特異なパラメータに関するユニタリ誘導表現の部分表現としては現れるが、既約な誘導表現そのものとしては表わされない。以下では DS(離散系列表現) は LDS の一部として含まれているものとする。

[1] この放物型部分群は通常 Siegel parabolic と呼ばれる。

[2] もちろん e^ν がユニタリでなくても (π, V) はユニタリ表現になりうる。このようなとき (歴史的な理由から) 特に**補系列表現**と呼ぶことがある。

[3] ここでいう極限とは Zuckerman の translation functor による regular infinitesimal character から singular infinitesimal character への移行を指す ([Zuckerman])。

Definition 1.2 G を実半単純 (あるいは簡約型) の連結な行列群とする。このとき G の既約表現の同値類で「ある性質」を持つものを $\widehat{G}_{\text{ある性質}}$ の形に書くことにする。たとえば

$$\begin{array}{lcl} \widehat{G}_{\mathrm{adm}} & = & (\text{既約 admissible 表現の同値類}) \\ \widehat{G}_{\mathrm{u}} & = & (\text{既約 unitary 表現の同値類}) \\ \widehat{G}_{\mathrm{temp}} & = & (\text{既約 tempered 表現の同値類}) \\ \widehat{G}_{\mathrm{LDS}} & = & (\text{limits of discrete series 表現の同値類}) \\ \widehat{G}_{\mathrm{disc}} & = & \widehat{G}_{\mathrm{DS}} = (\text{離散系列表現の同値類}) \end{array}$$

などである。これらの表現の間には次のような包含関係がある[4]。

$$\widehat{G}_{\mathrm{adm}} \supset \widehat{G}_{\mathrm{u}} \supset \widehat{G}_{\mathrm{temp}} \supset \widehat{G}_{\mathrm{LDS}} \supset \widehat{G}_{\mathrm{disc}}$$

さて tempered な表現は $L^2(G)$ の Plancherel 直積分の台に現れるようなユニタリ表現である ([Bernstein]) が、その分類は LDS を用いて出来ることがわかる。

Theorem 1.3 (Knapp-Zuckerman [Knapp-Zuckerman], [redbook, Theorem 14.91]) $\forall \pi \in \widehat{G}_{\mathrm{temp}}$ に対して

$$\exists P \subset G: \ \text{尖点的放物型部分群}\ ,\ P = MAN: \ \text{Langlands 分解}\ ,$$

$$\exists \sigma \in \widehat{M}_{\mathrm{LDS}},\ \exists \nu \in \mathfrak{a}'$$

が存在して、$\pi = \mathrm{Ind}_P^G(\sigma \otimes e^{\sqrt{-1}\,\nu} \otimes 1_N)$ と書ける。この書き方は適当な共役性の下で一意的である。

この定理の重要性は次の定理をみればよくわかるであろう。

Theorem 1.4 (Langlands [Langlands, Lemmas 3.14 & 4.2], [redbook, Theorem 8.54]) $\forall \pi \in \widehat{G}_{\mathrm{adm}}$ に対して

$$\exists P \subset G: \ \text{放物型部分群}\ ,\ P = MAN: \ \text{Langlands 分解}\ ,$$

$$\exists \xi \in \widehat{M}_{\mathrm{temp}},\ \exists \nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*: \ \text{strictly } N\text{-positive}^{5}$$

が存在して π は $\mathrm{Ind}_P^G(\xi \otimes e^{\nu} \otimes 1_N)$ のただ一つの既約商表現 $J(P;\xi,\nu)$ の形に書ける : $\pi \simeq J(P;\xi,\nu)$. またこの書き方は放物型部分群の共役性の下で一意的である。

ここで Knapp-Zuckerman の定理により $\xi \in \widehat{M}_{\mathrm{temp}}$ は M の尖点的放物型部分群からの LDS の誘導表現として書けているわけだからこの二つの定理を合わせると次のことがわかる。

[4] よく知られているように G がコンパクト Cartan 部分群を持つとき、かつその時に限り $\widehat{G}_{\mathrm{disc}} \neq \emptyset$ である (Harish-Chandra によるが、例えば [redbook, Theorem 12.20] 参照)。このとき G 自身がコンパクトであることと $\widehat{G}_{\mathrm{LDS}} = \widehat{G}_{\mathrm{disc}}$ は同値である。あとの説明を見ればわかるように $\widehat{G}_{\mathrm{temp}} \neq \emptyset$ は常に成り立っている。

[5] $\mathrm{Re}\,\nu$ が open Weyl chamber に入る、という意味。

Theorem 1.5 (revised Langlands classification [redbook, Theorem 14.92]) $\forall\pi \in \widehat{G}_{\mathrm{adm}}$ に対して

$$\exists P \subset G: \text{ 尖点的放物型部分群 }, P = MAN: \text{ Langlands 分解 },$$

$$\exists\sigma \in \widehat{M}_{\mathrm{LDS}},\ \exists\nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{*}: \ N\text{-positive}^{6}$$

が存在して $\mathrm{Ind}_P^G(\sigma \otimes e^{\nu} \otimes 1_N)$ のただ一つの既約商表現 $J(P;\sigma,\nu)$ が π を与える：$\pi \simeq J(P;\sigma,\nu)$. このパラメータ $(P;\sigma,\nu)$ によって $\pi \in \widehat{G}_{\mathrm{adm}}$ は分類される[7]。

Definition 1.6 上の定理に現れる誘導表現 $\mathrm{Ind}_P^G(\sigma \otimes e^{\nu} \otimes 1_N)$ を **standard 表現**、あるいは **一般主系列表現** (generalized principal series representation) と呼ぶ。

以上の説明からわかるように standard 表現とは (それ自身は既約表現とは限らないが) 既約表現を分類する「素」になるような表現である。したがってその定義は分類の方法によっても若干変わってくる。現在では以下の 3 種類の既約表現の分類方法があり、それに伴って 3 種類の見かけ上は異なる standard 表現の定義がある。

1. Langlands-Knapp-Zuckerman による分類 (上で説明したもの ([redbook] 参照))
2. Vogan-Zuckerman による minimal K-type を用いた分類 ([greenbook])
3. Beilinson-Bernstein による旗多様体上の $\mathfrak{D}$-加群を用いた分類 ([Beilinson-Bernstein], [HMSW], [Schmid 91])

これらの分類とその standard 表現についても簡単に見ておくことにする。

2 Vogan(-Zuckerman) による既約表現の分類

$G \supset K$ を極大コンパクト部分群とし、ϑ を対応する Cartan 対合とする。また $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ を Cartan 分解とする。この分解は Cartan 対合 ϑ に関する固有空間分解にほかならない。

Example 2.1

$$G = SU(2,2) \supset S(U(2) \times U(2)) = K,\ \vartheta(g) = {}^t\bar{g}^{-1}$$

$K = G^{\vartheta} = \{g \in G |\ \vartheta(g) = g\}$ であることに注意しよう。 $Sp(2,\mathbb{R})$ では

$$\vartheta(g) = {}^t g^{-1} \quad (g \in Sp(2,\mathbb{R})),\ K = G^{\vartheta} \simeq U(2)$$

となる。

[6] Re ν が closed Weyl chamber に入る、という意味。実はただ一つの既約商表現が存在するためにはこれだけでは不十分である。詳しくは [redbook, Theorem 14.92] を見られたい。

[7] しかし、このようにして表された表現の中には重複があり、どのパラメータが同じ表現を表すかを決めるのはしばしば厄介な手続きになる。

$\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$: Borel 部分代数をとる (必ずしも $\mathfrak{g}$ の Borel 部分代数の複素化ではないことに注意)。 $\mathfrak{b}$ の適当な G 共役を取ることにより $\exists \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$: ϑ-不変 Cartan 部分代数が存在して $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{b}$ となるようにできる ([Matsuki], [greenbook, Proposition 2.3.4])。$\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ から ϑ-不変 Cartan 部分群 $H = TA = Z_G(\mathfrak{h}_c)$ を定義する。ここに T はコンパクトな torus で A はベクトル群であるが、 T は連結とは限らないことに注意しよう。

Definition 2.2 Λ を Cartan 部分群 H の一次元表現で、 $\Lambda|_T$ がユニタリ指標になるようなものとする。このとき Λ の微分を $\mathrm{d}\Lambda = \lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$ と書いておく。$\mathbb{C}_\Lambda$ を Λ から決まる $(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}, T)$-加群とするとき、

$$\mathcal{R}_{\mathfrak{b}}^p(\mathbb{C}_\Lambda) = \mathcal{A}_{\mathfrak{b}}^p(\Lambda) \; (0 \leq p)$$

を (Vogan-Zuckerman の) **standard 加群**と呼ぶ。

上の定義において

$$\mathcal{R}_{\mathfrak{b}}^p(V) = \left(\Gamma_T^K\right)^p \left(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{b}}\left(U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}), V \otimes \wedge^{\mathrm{top}}[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]\right)_{[T]}\right)$$

である。ここに $V_{[K]}$ は V の K-有限ベクトル全体の成す $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$-加群を表わし、 Γ_T^K は Zuckerman の関手、さらに $\left(\Gamma_T^K\right)^p$ はその右導来関手を意味する (この関手は通常 relative Lie algebra cohomology を用いて計算される (cf. [darkgreenbook, Chapter 6], [Schmid 91, §4]))。

Vogan はこのようにして定義された standard 加群と **minimal K-type** (あるいは lowest K-type ともいう) を用いて $\widehat{G}_{\mathrm{adm}}$ の分類を行っている ([greenbook])。Vogan-Zuckerman の standard 加群と Langlands-Knapp-Zuckerman の意味での standard 加群との関係を少しだけ例で見ておこう。

Example 2.3 $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ が複素共役で不変 ($\overline{\mathfrak{b}} = \mathfrak{b}$)、つまり $\mathfrak{g}$ の中に実形を持つとき。このときは G は quasi-split 群と呼ばれるが、話を簡単にするために特に split 群の場合に考えよう。たとえば、 $Sp(2,\mathbb{R}), SU(2,2)$ ともに quasi-split であり、 $Sp(2,\mathbb{R})$ は split でもある。

G が split ならば $\exists \mathfrak{h}$: split Cartan 部分代数が存在して $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{b}$ としてよい。すると $\mathfrak{a} = \mathfrak{h}$ かつ $T = Z_K(\mathfrak{a}) \simeq H/H_0$ は有限群である。したがって $\mathbb{C}_\Lambda$ は $H_0 = A \simeq \mathbb{R}^l$ の一次元表現と可換有限群 T の一次元表現の outer tensor 積表現である。 $\mathfrak{u}$ は $\mathfrak{b}$ のべき零根基で、

$$\wedge^{\mathrm{top}}\mathfrak{u} = \mathbb{C} \bigwedge_{\alpha} E_\alpha \; (E_\alpha \quad (\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})) \text{ はルート } \alpha \text{ のルートベクトル })$$

となっているからその上に A は微分が $2\rho = \sum_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})} \alpha$ の表現として働く。もちろん T も各ルートベクトル E_α 上に一次元表現として働いているのでそれらの積表現として働く。

以上の記号の下に

$$\mathcal{R}_{\mathfrak{b}}^0(\mathbb{C}_\Lambda) \simeq \left(\mathrm{Ind}_{B=TAU}^G \mathbb{C}_\Lambda \otimes (\wedge^{\mathrm{top}}\mathfrak{u}) \cdot e^{-\rho} \otimes 1_U\right)_{[K]}$$

が成り立ち、他の $\mathcal{R}_{\mathfrak{b}}^p$ はすべて消える ([greenbook, §6.3], [Schmid 91, (4.9) 式])。したがってこの場合は極小放物型部分群からの普通の放物型誘導表現になり、**主系列表現**と呼ばれるものである。

すこし具体的に計算しておく。 $G = Sp(2,\mathbb{R})$ では、 Borel 部分群が次のように取れる。

$$B = TAU = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} \varepsilon_1 & & & \\ & \varepsilon_2 & & \\ \hline & & \varepsilon_1 & \\ & & & \varepsilon_2 \end{array} \right) \middle| \ \varepsilon_i = \pm 1 \right\} \times$$

$$\times \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ \hline & & a_1^{-1} & \\ & & & a_2^{-1} \end{array} \right) \middle| \ a_i \in \mathbb{R}_+^\times \right\} \times \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & * & \multicolumn{2}{c}{*} \\ 0 & 1 & & \\ \hline & & 1 & 0 \\ & & * & 1 \end{array} \right) \in G \right\}$$

したがって、 $T \simeq \mathbb{Z}_2^2$ の表現は $\widehat{T} \simeq \mathbb{Z}_2^2 \ni (t_1, t_2)$ で決まり、 $A \simeq \mathbb{R}^2$ の一次元表現は e^ν $(\nu = (\nu_1, \nu_2) \in \mathbb{C}^2 \simeq \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*)$ によって決まる。また $\wedge^{\mathrm{top}}\mathfrak{u}$ にも TA は働くが、それぞれの表現にその分を吸収させてしまうことが出来る。したがって

$$\mathrm{Ind}_B^G \left(\varepsilon_1^{t_1}\varepsilon_2^{t_2}\right) \otimes \left(a_1^{\nu_1}a_2^{\nu_2}\right) \otimes 1_U$$

が standard 表現である。

Example 2.4 $\overline{\mathfrak{b}} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{h}_\mathbb{C}$ が Cartan 部分代数の時[8]。このときは $T = Z_G(\mathfrak{h}_\mathbb{C})$ は G のコンパクト Cartan 部分群になり、特に G は DS を持つ ($\Leftrightarrow \operatorname{rank} G = \operatorname{rank} K$)。 T は連結であることに注意しよう。したがって $\Lambda \in \widehat{T}$ は $d\Lambda = \lambda \in \sqrt{-1}\,\mathfrak{h}'$ によって一意的に決まる (ただし λ はもちろん T の表現に積分できるための積分可能条件を満たさねばならない[9])。 $s = \dim_\mathbb{C}(\mathfrak{k}_\mathbb{C} \cap \mathfrak{u}) = (1/2)\dim(K/T)$ とおくと、

$$\mathcal{R}_\mathfrak{b}^s(\mathbb{C}_\lambda) = (\text{discrete series of Harish-Chandra parameter } \lambda + \rho)_{[K]}$$

であって他の $\mathcal{R}_\mathfrak{b}^p(\mathbb{C}_\lambda)$ はすべて消える。ただし λ には $\mathfrak{b}$ に関する positivity と regularity を仮定する。詳しくは [darkgreenbook, §6.7.6], [Schmid 91, (4.10) 式] などを参照のこと[10]。

このように Borel 部分代数の取り方によって cohomological induction は性質の違ったものを表わす。例 2.3 における $\mathcal{R}_\mathfrak{b}^*$ を **hyperbolic induction**, 例 2.4 における $\mathcal{R}_\mathfrak{b}^*$ を **elliptic induction** などと呼ぶこともある。一般の $\mathcal{R}_\mathfrak{b}^*$ はこの二つの場合の混交であって、代表的な場合は

$$\mathcal{R}_\mathfrak{q}^i\,(\text{極小放物型部分群から誘導された主系列表現})$$

[8]このときは適当な $K_\mathbb{C}$ 共役を取ることによって $\vartheta\mathfrak{b} = \mathfrak{b}$ とできる。一般に $\vartheta\mathfrak{b} = \mathfrak{b}$ を満たすような Borel 部分代数に対応する Cartan 部分代数は fundamental Cartan 部分代数と呼ばれ、コンパクト部分が最大の Cartan 部分代数である (松木氏談)。

[9]英語では integral condition で、通常は「整条件」などと訳される。これも意味の無いことではなく実際は $\lambda(\alpha^\vee) \in \mathbb{Z}$ という条件でだいたいかける (この記述はかなり曖昧であるが、例えば [redbook, §IV.5] を参照されたい)。ここに $\alpha^\vee$ は coroot である。

[10]Wallach の本は離散系列についてはかなり具体的に書いてあり、計算するには参考になる。ただ惜しむらくは随所に致命的な misprint がある。たとえば上記箇所では離散系列の定義式 $D_{P,\mu} = \Gamma^n M(\mathfrak{b}, \mathbb{C}_{s_K(\mu+\rho_k)})$ において ρ_k ではなく ρ が使われるべきである。

や、または

$$\mathrm{Ind}_P^G\,(\text{尖点的放物型部分群の離散系列表現})$$

の形になる。前者は Vogan の本で standard 表現として定義されたもの ([greenbook, §6.5, Definition 6.5.2])、後者は前節で説明したように Langlands-Knapp-Zuckerman の意味での standard 表現である。

3 Beilinson-Bernstein による既約表現の分類

$X = G_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}}$ を旗多様体とする。 X には $K_{\mathbb{C}}$ が左から作用している。$Q \subset X$ を $K_{\mathbb{C}}$ 軌道として、 Q 上に $K_{\mathbb{C}}$-equivariant で既約な局所系 τ をとる。 τ はほとんどの場合自明なものしかなく、他にあったとしても有限個である。

Q 上の τ に随伴した $\mathfrak{D}_\lambda$-加群を X に極小拡張したものを $\mathcal{I}(Q,\tau)$ と書き、

$$\Gamma^p(X, \mathcal{I}(Q,\tau))\ (0 \le p)$$

を **standard 加群** と呼ぶ[11]。

duality theorem によって Beilinson-Bernstein の意味の standard 加群は Vogan-Zuckerman の意味の standard 加群の双対表現 (の K-有限部分表現) と同値になる ([HMSW])。

筆者は $\mathfrak{D}$-加群の理論はよく理解していない部分が多いのでここで詳しく記述することは止める。詳しくは [HMSW] [Schmid 91] [Chang] [Mirković] などを参照されたい。また $\mathfrak{D}$-加群の基礎的な部分の優れた概説が谷崎によってなされている ([Tanisaki])。また関口による詳しい解説 ([Sekiguchi]) もあるのであわせて参照されたい。ただどちらも実 Lie 群に対してはあまり詳しくなく、主に複素代数群が扱われている。

[11] $\mathcal{I}(Q,\tau)$ のことを Harish-Chandra 層と呼ぶ。こちらの方は既約性とかが見易い ([Miličić] 参照) が、無限小指標が特異の場合には、可約であっても大域切断を取ることにより消滅が起って既約になることもあるので、一般に standard 加群の方は (特異無限小指標の場合には) 複雑な振る舞いをする。

Part II. $SU(2,2)$ における standard 表現

$G = SU(2,2)$ の尖点的放物型部分群は (共役を除いて) 次の 3 つである[12]。

1. $P_{\min} = P_{\emptyset}$: 極小放物型部分群
2. $P_{\max} = P_{\beta}$: 極大放物型部分群 ($\leftrightarrow$ long root)
3. G 自身

以下上の 3 つの順に Langlands-Knapp-Zuckerman の意味での standard 表現 (一般化された主系列表現) を扱う。記号は主に [Knapp-Speh] に拠った。まず一般的な記号から重複をいとわず書いておこう。

$$G = SU(2,2) = \{g \in SL(4,\mathbb{C}) |\ g^* I_{2,2} g = I_{2,2}\}\,,\ I_{2,2} = \begin{pmatrix} 1_2 & \\ & -1_2 \end{pmatrix}$$

$$\vartheta(g) = {}^t\overline{g}^{-1} :\ \text{Cartan 対合 (群レベル)}\ ,$$

$$K = G^{\vartheta} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} U(2) & \\ \hline & U(2) \end{array} \right) \in SL(4,\mathbb{C}) \right\} \simeq S(U(2) \times U(2))$$

4 極小放物型部分群

極小放物型部分群を $P_{\mathrm{m}} = P_{\min}$ と書く。

$$P_{\mathrm{m}} = M_{\mathrm{m}} A_{\mathrm{m}} N_{\mathrm{m}} \subset G$$

$M_{\mathrm{m}} = T \times \{1, \gamma_2\}$ は連結ではなく、連結成分が二つある。原点を含む連結成分が T である。

$$T = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} e^{i\theta} & & & \\ & e^{-i\theta} & & \\ \hline & & e^{i\theta} & \\ & & & e^{-i\theta} \end{array} \right) \middle|\ \theta \in \mathbb{R} \right\},\ \gamma_2 = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & & \\ & -1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & & -1 \end{array} \right)$$

ベクトル群 A_{m} は Lie 環で与えたほうが見易い。

$$A_{\mathrm{m}} = \exp \mathfrak{a}_{\mathrm{m}},\ \mathfrak{a}_{\mathrm{m}} = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} & & s & \\ & & & t \\ \hline s & & & \\ & t & & \end{array} \right) \middle|\ s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

べき単群 N_{m} は $\mathfrak{a}_{\mathrm{m}}$ 関する制限ルート系とその正ルートによって与えられる。

$$\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_{\mathrm{m}}) = \{\pm 2f_1, \pm 2f_2, \pm f_1 \pm f_2\} :\ \text{制限ルート系}\ ,$$

[12] 放物型部分群はこの他に Siegel 型のものがあるが、これは尖点的ではない。

ここに $f_1, f_2 \in \mathfrak{a}_{\mathrm{m}}'$ であって

$$f_1(X) = s, \quad f_2(X) = t \quad (X \in \mathfrak{a}_{\mathrm{m}}\ (X \text{ は上の行列の形}))$$

$$\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_{\mathrm{m}}) = \Sigma \supset \Sigma^+ = \{2f_1, 2f_2, f_1 \pm f_2\} : \text{ 正ルート }, \ N_{\mathrm{m}} = \exp\left(\sum_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_\alpha\right)$$

ここに $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}$ は制限ルート $\alpha \in \Sigma$ に関するルート空間を表わす。

$M_{\mathrm{m}} A_{\mathrm{m}}$ は可換な Cartan 部分群になっているので P_{m} は G の Borel 部分群であり、したがって $G = SU(2,2)$ は quasi-split 群である。 quasi-split 群の極小放物型部分群から誘導された表現は Vogan の理論において本質的であって、極めて詳しく調べられている。読者は [greenbook, Chapter 4] を合わせて読まれることをお勧めする。

さて主系列表現を具体的に記述するためにまず $M_{\mathrm{m}} A_{\mathrm{m}}$ の表現を記述しておく。今の場合は可換な Cartan 部分群の表現であるので何の問題もないであろう。

$$\widehat{M}_{\mathrm{m}} = \{(\kappa, n) |\ n \in \mathbb{Z}, \kappa = \pm 1\} \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z},$$

$$n(u) = e^{in\theta} \quad (u \in T :\ u \text{ は上の行列の形 }),\ \kappa(\gamma_2) = \kappa$$

$$\widehat{A}_{\mathrm{m}} = \mathfrak{a}_{\mathrm{m}\mathbb{C}}^* = \{\nu = \nu_1 f_1 + \nu_2 f_2 |\ \nu = (\nu_1, \nu_2) \in \mathbb{C}^2\} \simeq \mathbb{C}^2$$

そこで主系列表現を

$$\pi((\kappa, n); \nu) = \mathrm{Ind}_{P_{\mathrm{m}}}^G ((\kappa, n) \otimes e^\nu \otimes 1_{N_{\mathrm{m}}})$$

と書くことにしよう。まず最初の問題

$$\boxed{\pi((\kappa, n); \nu) \text{ はいつ既約になるか?}}$$

について考えてみよう。この問題に関しては π の無限小指標が正則の時 Speh-Vogan による簡単な判定法がある。その前にまず無限小指標について簡単に説明しておこう。

表現 π が既約ならば展開環 $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ の中心 $\mathfrak{Z}$ はスカラー作用素で働くと期待できる (Shur の補題)。このように $\mathfrak{Z}$ がスカラーで働くような表現を quasi-simple な表現と呼ぶが、 $\widehat{G}_{\mathrm{adm}}$ に属する表現はすべて quasi-simple であることが知られている。また一般化された主系列表現も (既約とは限らないが) quasi-simple である。

一方展開環の中心 $\mathfrak{Z}$ は Harish-Chandra 同型により Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}_\mathbb{C}$ の展開環 (これは可換であるから対称代数、あるいは $\mathfrak{h}_\mathbb{C}^*$ 上の多項式環といってもよい) の Weyl 群不変元のなす代数 $U(\mathfrak{h}_\mathbb{C})^W$ と同型である。したがって

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{alg}}(\mathfrak{Z}, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{alg}}(U(\mathfrak{h}_\mathbb{C})^W, \mathbb{C}) \simeq \mathfrak{h}_\mathbb{C}^*/W$$

が成り立っている。上で見たように quasi-simple 表現 π には $\mathrm{Hom}_{\mathrm{alg}}(\mathfrak{Z}, \mathbb{C})$ の元がただ一つ対応しているが、これを**無限小指標**と呼ぶ。無限小指標 χ には上の同型から $\lambda \in \mathfrak{h}_\mathbb{C}^*$ が対応しているので、 $\chi = \chi_\lambda$ と書いて λ のことも無限小指標と呼ぶ。$\lambda \in \mathfrak{h}_\mathbb{C}^*$ の選び方には Weyl 群の作用による不定性があることに注意しよう。 λ の固定部分群

$$W_\lambda = \{w \in W |\ w\lambda = \lambda\}$$

は λ の退化度を表わすが、とくに $W_\lambda = \{1\}$ のときに λ を**正則**といい、それ以外の時**特異**という。

Lemma 4.1 主系列表現 $\pi((\kappa,n);\nu)$ の無限小指標 λ は

$$\lambda = \frac{1}{4}(n+2\nu_1, -n+2\nu_2, -n-2\nu_2, n-2\nu_1)$$

で与えられる。

この補題では $\mathfrak{h} = \mathfrak{m}_{\mathrm{m}} + \mathfrak{a}_{\mathrm{m}}$ を Cayley 変換によって対角化してその上の線型形式として λ を与えている。具体的には次のようにする。

$$C_m = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & & 1 \\ & 1 & 1 & \\ \hline 1 & & & -1 \\ & 1 & -1 & \end{array}\right)$$

とおき、 $X \in \mathfrak{h} = \mathfrak{m}_{\mathrm{m}} \oplus \mathfrak{a}_{\mathrm{m}}$ に対して $\mathbf{c}(X) = C_m^{-1} X C_m$ と定義する。行列の形で書くならば

$$\mathbf{c}: \left(\begin{array}{cc|cc} i\theta & & s & \\ & -i\theta & & t \\ \hline s & & i\theta & \\ & t & & -i\theta \end{array}\right) \longmapsto \left(\begin{array}{cc|cc} s+i\theta & & & \\ & t-i\theta & & \\ \hline & & -t-i\theta & \\ & & & -s+i\theta \end{array}\right)$$

となる。さらに $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ には $\mathbf{c}$ を複素線型に延長し、自然に $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ と $\mathfrak{sl}(4,\mathbb{C})$ の対角行列の成す Cartan 部分代数を同一視する。すると $(\lambda_1,\cdots,\lambda_4) \in \mathbb{C}^4$ は自然に $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$ を次のように決める。

$$\lambda(X) = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \left(\mathbf{c}(X)\right)_i \ (X \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$$

ただし $\left(\mathbf{c}(X)\right)_i$ は対角行列 $\mathbf{c}(X)$ の第 (i,i) 成分を表わすものとする。上の補題中の λ の成分表示はこの意味で与えられたものである。

では Speh-Vogan の一般化された主系列の既約性の判定方法について述べよう。

Theorem 4.2 (Speh-Vogan [Speh-Vogan, Theorem 1.1]) $P = MAN$ を尖点的放物型部分群としてその一般化された主系列表現

$$\pi(\sigma;\nu) = \mathrm{Ind}_P^G\left(\sigma \otimes e^{\nu} \otimes 1_N\right) \ (\sigma \in \widehat{M}_{DS}, \nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$$

を考える。$\mathfrak{m}$ のコンパクト Cartan 部分代数を $\mathfrak{t}^+$ とすれば $\mathfrak{h} = \mathfrak{t}^+ \oplus \mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数である。以下ルート系などはすべて $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ について考えるものとする。$\pi(\sigma;\nu)$ の無限小指標 $\lambda = \lambda_M + \nu$ が正則であるとき[13]、 $\pi(\sigma;\nu)$ が可約であるための必要十分条件は $\exists \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ が存在して次の条件を満たすことである。
　λ は α に関して整つまり

$$\alpha^{\vee}(\lambda) = \frac{2\langle\alpha,\lambda\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} \in \mathbb{Z}$$

であって次の (a) または (b) を満たす。

[13] λ_M は σ の無限小指標である。誘導表現は正規化されていることに注意せよ。

(a) α は complex root ($\Leftrightarrow -\vartheta\alpha \neq \pm\alpha$) であって[14]、

$$\langle \alpha, \lambda \rangle > 0 > \langle \vartheta\alpha, \lambda \rangle$$

が成り立つ。

(b) α は real root ($\Leftrightarrow -\vartheta\alpha = \alpha$) であって、 parity condition を満たす[15]。

この定理を $G = SU(2,2)$ で、極小放物型部分群からの主系列表現の場合に当てはめると次のようになる。

Theorem 4.3 $n \neq \pm\nu_1 \pm \nu_2,\quad \nu_1, \nu_2 \neq 0$ であるとする。このとき $\pi((\kappa, n); \nu)$ が可約であるための必要十分条件は $\exists\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ が存在して次の条件を満たすことである。
λ は α に関して整つまり

$$\alpha^\vee(\lambda) = \frac{2\langle \alpha, \lambda \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \in \mathbb{Z}$$

であって次の (a′) または (b′) を満たす。

(a′) α は complex root ($\Leftrightarrow -\vartheta\alpha \neq \pm\alpha$) であって[16]、

$$\langle \alpha, \lambda \rangle \cdot \langle -\vartheta\alpha, \lambda \rangle > 0$$

が成り立つ。

(b′) α は real root ($\Leftrightarrow -\vartheta\alpha = \alpha$) であって、 parity condition を満たす[17]。

この定理は Speh-Vogan の条件 (a) を少し書き直したものにすぎない。つまり今の場合 $\alpha^\vee(\lambda) \in \mathbb{Z}$ と $(\vartheta\alpha)^\vee(\lambda) \in \mathbb{Z}$ とが同値であることに注意すればよい。
以下この条件 (a′) および (b′) を具体的に書き下してみよう。まずはルート系から見ておこう。 $G = SU(2,2)$ は A_3 型のルート系を持つ。それを通常のように

$$\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j | \ 1 \leq i \neq j \leq 4\}$$

と表わす。 Cartan 部分群 $H = M_{\mathrm{m}}A_{\mathrm{m}}$ の連結成分は $H_0 = TA_{\mathrm{m}}$ であり、$X \in \mathfrak{h} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}_{\mathrm{m}}$ を

$$X = \left(\begin{array}{cc|cc} i\theta & & s & \\ & -i\theta & & t \\ \hline s & & i\theta & \\ & t & & -i\theta \end{array} \right)$$

[14][Speh-Vogan] では complex root には純虚ルート ($\Leftrightarrow -\vartheta\alpha = -\alpha$) も入っているが、そのときには以下の不等式は自動的に不成立である。したがってここでは除いている。そもそも純虚ルートは離散系列 σ の無限小指標にしか関係しないので一般主系列の既約性については何等影響を与えないのである。
[15] この parity condition については後ほど $G = SU(2,2)$ については具体的に解説する。
[16] $-\vartheta$ は Cartan 部分代数を対角型行列として実現しておくとその上では複素共役を取ることに当たる。
[17] この parity condition については後ほど具体的に解説する。

と書いておけば、

$$\begin{array}{ll}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)(X)=s-t+2\sqrt{-1}\,\theta, & (\varepsilon_3-\varepsilon_4)(X)=s-t-2\sqrt{-1}\,\theta \\ (\varepsilon_1-\varepsilon_3)(X)=s+t+2\sqrt{-1}\,\theta, & (\varepsilon_2-\varepsilon_4)(X)=s+t-2\sqrt{-1}\,\theta \\ (\varepsilon_1-\varepsilon_4)(X)=2s & \\ (\varepsilon_2-\varepsilon_3)(X)=2t & \end{array}$$

が正ルートになっている。このうち横に並んだもの同士は複素共役で、したがってこの二つは複素ルートである。最後の二つは実ルートで、実際このときルートの値が実数になっていることに注意されたい。またこのルート系において $\theta=0$ と形式的におけば (重複度も込めた) 制限ルート系 $\Sigma^+(\mathfrak{g},\mathfrak{a}_{\mathrm{m}})$ が得られ、それはちょうど N_{m} を決める正の制限ルート系になっていることに注意しよう。

さて上の定理の条件を確かめてみよう。たとえば複素ルート $\alpha=\varepsilon_1-\varepsilon_2$ をとる。このとき $-\vartheta\alpha=\varepsilon_3-\varepsilon_4$ である。したがって上の定理の条件は

$$\frac{2\langle\alpha,\lambda\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}=\frac{1}{2}(n+\nu_1-\nu_2)\in\mathbb{Z}$$

かつ

$$\langle\alpha,\lambda\rangle\langle-\vartheta\alpha,\lambda\rangle=\frac{1}{4}(n+\nu_1-\nu_2)(-n+\nu_1-\nu_2)>0$$

となる。これをまとめると

$$n\equiv\nu_1-\nu_2 \pmod 2),\ |\nu_1-\nu_2|>|n|$$

が条件になる。($n\equiv\nu_1-\nu_2$ と書いた時点で暗黙の内に $\nu_1-\nu_2\in\mathbb{Z}$ が仮定されているものと了解して欲しい。)

次に実ルートの場合を見てみよう。例として $\alpha=\varepsilon_1-\varepsilon_4=2s$ を考えよう。まず整条件は

$$\frac{2\langle\alpha,\lambda\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}=\frac{1}{4}((n+2\nu_1)-(n-2\nu_1))=\nu_1\in\mathbb{Z}$$

である。問題は parity condition の方であるが、すべての用語を説明すると紙数が足らないので、以下現れる用語で説明していないものについては例えば [redbook] あるいは [Warner] を参照されたい。

さて実ルート α によって定まる Cayley 変換を $\mathbf{d}_\alpha$ と書く。この Cayley 変換によって得られる Cartan 部分代数を $\tilde{\mathfrak{h}}$ としてルート系 $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\tilde{\mathfrak{h}}_{\mathbb{C}})$ の中の純虚ルートの全体を Ψ_1 とすれば、 α の $\mathbf{d}_\alpha$ による像 $\beta=\mathbf{d}_\alpha(\alpha)$ は Ψ_1 の non-compact ルートである。さて β を単純ルートにするような Ψ_1 の正ルート系を一つ決め、その順序に関して

$$2\rho(\Psi_1)=\sum_{\gamma\in\Psi^+}\gamma,\ 2\rho_c(\Psi_1)=\sum_{\substack{\gamma\in\Psi^+,\\ \gamma:\text{compact root}}}\gamma$$

と定義する。今の場合

$$2\rho(\Psi_1)=\beta=\varepsilon_1-\varepsilon_4,\ 2\rho_c(\Psi_1)=0$$

となっていることに注意しよう。さて以上の記号の下に

$$n_\alpha = \frac{2\langle \beta, \rho(\Psi_1) - 2\rho_c(\Psi_1)\rangle}{\langle \beta, \beta\rangle} \in \mathbb{Z}$$

と定義する。もちろん $\alpha = \varepsilon_1 - \varepsilon_4$ の時には $n_\alpha = 1$ である。

次に、α は実ルートであるから α の定める $\mathfrak{sl}(2)$-triplet は $SL(2,\mathbb{R})$ に同型である。この同型によって $-1_2 \in SL(2,\mathbb{R})$ に対応する G の元を m_α と書こう。いまの場合には具体的には

$$m_\alpha = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & & & \\ & 1 & & \\ \hline & & -1 & \\ & & & 1 \end{array}\right)$$

となっている。

以上の用意の下に $\pi(\sigma;\nu)$ についての parity condition は以下のように述べることが出来る。

$$\sigma(m_\alpha) = (-1)^{n_\alpha + 2\langle\alpha,\lambda\rangle/\langle\alpha,\alpha\rangle}$$

これを今の場合に当てはめれば、左辺は $(\kappa, n)(-1_4\gamma_2) = (-1)^n\kappa$ であるから

$$(-1)^n\kappa = (-1)^{1+\nu_1}, \text{ i.e. } \nu_1 \equiv \begin{cases} n+1 \pmod 2 & \text{if } \kappa = 1, \\ n \pmod 2 & \text{if } \kappa = -1, \end{cases}$$

となることがわかる。

Example 4.4 この parity condition は $SL(2,\mathbb{R})$ の表現をよく知っている人にとってはわかりやすいと思うのでここで簡単に説明しておく。$SL(2,\mathbb{R})$ の Borel 部分群 B を上半三角行列とし、$B = MAN$ を $M = \{\pm 1_2\}$、A を対角成分が正の対角行列、N を対角線が 1 の上半三角行列とする。このとき主系列表現を

$$\pi(\kappa;\nu) = \mathrm{Ind}_B^{SL(2,\mathbb{R})}(\kappa \otimes e^\nu \otimes 1_N)$$

と定義する。ここに $\kappa \in \{\pm 1\} \simeq \widehat{M}$、$e^\nu$ は A に属する行列の $(1,1)$ 成分を a と書くならば $e^{\nu \log a} = a^\nu$ で与えられる A のユニタリとは限らない一次元表現である。このときよく知られているように $\pi(-1; 2n) \quad (n \in \mathbb{Z})$ および $\pi(1; 2n+1) \quad (n \in \mathbb{Z})$ は可約であってその他の $\pi(\kappa;\nu) \quad (\nu \in \mathbb{C})$ は既約である。

では上の parity condition は一体どうなっているだろうか? 問題となるルートはただ一つでこのルートは実ルートである。まず無限小指標の整条件は $\nu \in \mathbb{Z}$ と表わされる。次に $SL(2,\mathbb{R})$ はコンパクトルートを持たないので上で計算した n_α は

$$n_\alpha = \frac{2\langle\alpha, \rho - 2\rho_c\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} = \frac{2\langle\alpha, \alpha/2\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} = 1$$

で $m_\alpha = -1_2$ だから parity condition は

$$\sigma(m_\alpha) = \kappa = (-1)^{n_\alpha}\cdot(-1)^\nu, \text{ i.e. } \nu \equiv \begin{cases} 0 \pmod 2 & \text{if } \kappa = -1 \\ 1 \pmod 2 & \text{if } \kappa = 1 \end{cases}$$

となり、これは上に書いた事実にほかならない。実際 [Speh-Vogan] では実階数 1 の場合に可約性の証明を帰着して本質的にはこの $SL(2,\mathbb{R})$ の主系列表現の可約性が用いられている。このような可約性について一般的な考察を行ったのは Schmid [Schmid 75] であり、指標の段階で可約性を表わした等式を Schmid identity と呼ぶ ([redbook, Theorem 12.34] 参照)。

残った複素ルート、実ルートについてもまったく同様に計算すれば次の定理を得る。

Theorem 4.5 $n \neq \pm\nu_1 \pm \nu_2, \quad \nu_1, \nu_2 \neq 0$ であるとする。このとき $\pi((\kappa, n); \nu)$ が可約であるための必要十分条件は次の (1) – (4) のいづれかが成り立つことである。

(1) $n \equiv \nu_1 - \nu_2 \pmod 2$ であって $|\nu_1 - \nu_2| > |n|$ が成り立つ。

(2) $n \equiv \nu_1 + \nu_2 \pmod 2$ であって $|\nu_1 + \nu_2| > |n|$ が成り立つ。

(3) $\nu_1 \in \mathbb{Z}$ であって、$\kappa = 1$ なら $\nu_1 \equiv n + 1 \pmod 2$、$\kappa = -1$ なら $\nu_1 \equiv n \pmod 2$ が成り立つ。

(4) $\nu_2 \in \mathbb{Z}$ であって、$\kappa = 1$ なら $\nu_2 \equiv 1 \pmod 2$、$\kappa = -1$ なら $\nu_2 \equiv 0 \pmod 2$ が成り立つ。

このようにして正則な無限小指標を持つ主系列表現についてはその可約性は非常に明快に書けることがわかった。では特異な主系列についてはどうか?まず上の定理は実は可約性の必要条件として有効である、ということに注意しておこう[18]。そのようにして可約性の範囲はかなり絞られる。

では例えば $\nu = 0$ のときはどうであろうか?このときは主系列表現はユニタリな誘導表現であり、状況はかなり見易くなる。以下それを R-group を中心に見ておこう。

5 R-group と minimal K-type

R-group は Weyl 群の部分群の商群であって $(\mathbb{Z}_2)^r \quad (\exists r \geq 0)$ と同型である ([greenbook, Definition 4.4.9, Lemma 4.3.14], また [Vogan 85, Theorem 3.6] も参照のこと)。この群は $\pi(\sigma; \nu) \quad (\sigma \in \widehat{M}_{\mathrm{DS}}, \nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$ によって決まる。特に $\nu \in \sqrt{-1}\,\mathfrak{a}'$、つまり $\pi(\sigma; \nu)$ がユニタリな誘導表現であるときには

$$\#(R\text{-group}) = (\pi(\sigma; \nu) \text{ の自己 intertwining 作用素の次元})$$

が成り立っている ([redbook, Theorem 14.43], [greenbook, Corollary 6.5.14][19])。

$\pi \in \widehat{G}_{\mathrm{adm}}$ の minimal K-type とは π を極大コンパクト部分群 K に制限して得られた表現 $\pi|_K$ の分解に現れる $\tau \in \widehat{K}$ のうち「極小」なもの。つまり $\pi|_K \supset \tau_\mu \in \widehat{K} \quad (\mu$: highest weight) とするとき

$$||\mu||^2 = \langle \mu + 2\rho_c, \mu + 2\rho_c \rangle \in \mathbb{Z}_{>0}$$

とおきこれを K-length と呼ぼう。 minimal K-type の定義はこの K-length が最少になるものという定義である。

$$\tau_\mu \in \widehat{K} \text{ が } \pi \text{ において極小} \overset{\mathrm{def}}{\iff} ||\mu||^2 \text{ が } \tau_\mu \subset \pi|_K \text{ となる } K\text{-type の中で最少値を取る}$$

[18]基本的にはこのような条件は十分条件になるべきものであるが、translation functor によって特異な無限小指標へと移行したときに消滅してしまう表現があるために事情が複雑になるのである。τ-invariant と呼ばれる概念はこのような消滅をコントロールするために考案された。

[19]Vogan のものは一見放物型部分群からの誘導ではないようにみえるが、実は同じことになる。つまり ϑ-stable cohomological parabolic induction は適当な尖点的放物型部分群を選ぶことによりここで扱っている実放物型部分群からの誘導表現に一致する [greenbook, Theorem 6.6.15]。

Theorem 5.1 (Knapp, Vogan) $\nu \in \sqrt{-1}\,\mathfrak{a}'$ のとき (つまり $\pi(\sigma;\nu)$ がユニタリな誘導表現であるとき)、次の (1), (2) が成立する。

(1) $\#(R\text{-group}) \leq \#(\text{ minimal } K\text{-types })$

(2) minimal K-type がただ一つしかない $\Rightarrow$ R-group は自明 $\Rightarrow$ $\pi(\sigma;\nu)$ は既約

Example 5.2 $G = SL(2,\mathbb{R})$ の主系列表現で見ておこう。よく知られているように

$$\mathrm{Ind}_B^G\,((\text{trivial}) \otimes e^{\nu} \otimes 1) \quad \cdots \quad \text{minimal } K\text{-type } = \{0\}$$

$$\mathrm{Ind}_B^G\,((\text{sign}) \otimes e^{\nu} \otimes 1) \quad \cdots \quad \text{minimal } K\text{-type } = \{\pm 1\}$$

である。したがってユニタリ誘導表現のところでは

$$\begin{cases} \mathrm{Ind}_B^G\,((\text{trivial}) \otimes e^{0} \otimes 1) & : \quad \text{既約} \\ \mathrm{Ind}_B^G\,((\text{sign}) \otimes e^{0} \otimes 1) & : \quad \text{可約} \quad (\#\text{ irreducible component } = 2) \end{cases}$$

となっている。上の方が既約なユニタリ主系列表現、下の方は二つの離散系列表現の極限 (LDS) へと分解する。

$G = SU(2,2)$ の極小放物型部分群の場合に戻ろう。まず K-type の記述についてみておこう。

$$K = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} e^{i\psi} & & & \\ & e^{i\psi} & & \\ \hline & & e^{-i\psi} & \\ & & & e^{-i\psi} \end{array} \right) \right\} \cdot \left(\begin{array}{c|c} SU(2) & \\ \hline & SU(2) \end{array} \right)$$

$$\widehat{K} \ni n' \otimes \tau_{\mu_1} \otimes \tau_{\mu_2}\ (n' \in \mathbb{Z}, \quad \mu_1, \mu_2 \geq 0 : \text{ highest weights })$$

ただし上の K の積表示は直積ではないので compatibility により $n' \equiv \mu_1 + \mu_2 \pmod 2$ でないといけない。このとき K-length は

$$K\text{-length } = n'^2 + 2(\mu_1 + 2)^2 + 2(\mu_2 + 2)^2$$

で与えられる。$\mu_1, \mu_2 \geq 0$ なので K-length の最少値は $n' = \mu_1 = \mu_2 = 0$、つまり自明な表現の時に $0 + 8 + 8 = 16$ である。したがって特に $((\kappa, n); \nu) = ((1,0); 0)$ ならば明らかに

$$\pi((1,0);0)|_K \supset 0 \otimes \tau_0 \otimes \tau_0$$

であってこれが極小になる (重複度[20]は 1)。つまり $\pi((1,0);0)$ はただ一つの minimal K-type を持つ。

[20]実は minimal K-type の重複度は常に 1 である ([greenbook, Theorem 6.5.10] また [greenbook, Corollary6.5.15] も参照のこと)。

Corollary 5.3 $\pi(0,0;\nu)$ $(\nu \in \sqrt{-1}\ \mathfrak{a}'_{\mathrm{m}})$ はユニタリな既約表現である : $\pi((1,0);\nu) \in \widehat{G}_{\mathrm{u}}$ $(\nu \in \sqrt{-1}\ \mathfrak{a}'_{\mathrm{m}})$.

具体的な R-group の計算は [Knapp-Speh, §3.3.a] に詳しく出ているのでそちらを参照していただきたい。例えば $\nu = 0$ のとき、既約成分は最大で 4 つ出るというようなことも判る。

Example 5.4 主系列表現 $\pi((-1,n);\nu)$ $(n \equiv 1 \pmod 2)$ の minimal K-type は $(n', \mu_1, \mu_2) = (\pm 2, 0, 0)$ のふたつ。 $\nu = 0$ ならば実は $\#$ R-group $= 2$ であって

$$\#(\pi((-1,n);0) \text{ の既約成分}) = 2$$

である。

他にも DS の主系列表現への埋めこみ ([Yamashita 90] の結果) などの話題はあるが、それは §II.7 にまわすことにしてとりあえず極大放物型部分群の場合にに移ろう。

6 極大放物型部分群

$$\begin{aligned}
P &= P_{2f_2} = MAN \quad (\beta = 2f_2) \\
\mathfrak{m} &= \mathfrak{m}_{\mathrm{m}} + \mathfrak{g}_\beta + \mathfrak{g}_{-\beta} + [\mathfrak{g}_\beta, \mathfrak{g}_{-\beta}] \\
&= \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} i\theta & & & \\ & -i\theta & & \\ \hline & & i\theta & \\ & & & -i\theta \end{array} \right) \middle| \ \theta \in \mathbb{R} \right\} \oplus \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & & 0 & \\ & i\delta & & w \\ \hline 0 & & 0 & \\ & \overline{w} & & -i\delta \end{array} \right) \middle| \ \delta \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{C} \right\} \\
M &= T \times \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & 0 & \\ & \alpha & & \beta \\ \hline 0 & & 1 & \\ & \overline{\beta} & & \overline{\alpha} \end{array} \right) \middle| \ |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}
\end{aligned}$$

$$\text{i.e.} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \in SU(1,1)$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a} &= \{H \in \mathfrak{a}_{\mathrm{m}} | 2f_2(H) = 0\} = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} & & s & \\ & & & 0 \\ \hline s & & & \\ & 0 & & \end{array} \right) \middle| \ s \in \mathbb{R} \right\} \\
A &= \exp \mathfrak{a} \\
N &= \exp \left(\mathfrak{g}_{2f_1} \oplus \mathfrak{g}_{f_1+f_2} \oplus \mathfrak{g}_{f_1-f_2} \right) \\
\mathfrak{h} &= \left\{ X = \left(\begin{array}{cc|cc} i\theta & & s & \\ & -i\theta + i\delta & & 0 \\ \hline s & & i\theta & \\ & 0 & & -i\theta - i\delta \end{array} \right) \middle| \ s, \theta, \delta \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}$$

ルート系 $\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})$ は次のようになる。ただし $X \in \mathfrak{h}$ は上の式に現れる行列とする。

$$\begin{array}{ll}
(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(X) = s - \sqrt{-1}\,\delta + 2\sqrt{-1}\,\theta, & (\varepsilon_2 - \varepsilon_4)(X) = s + \sqrt{-1}\,\delta - 2\sqrt{-1}\,\theta \\
(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)(X) = s + \sqrt{-1}\,\delta + 2\sqrt{-1}\,\theta, & (\varepsilon_3 - \varepsilon_4)(X) = s - \sqrt{-1}\,\delta - 2\sqrt{-1}\,\theta \\
(\varepsilon_1 - \varepsilon_4)(X) = 2s & \\
(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)(X) = 2\sqrt{-1}\,\delta &
\end{array}$$

が正ルートである[21]。このうち横に並んだもの同士は複素共役で、したがって複素ルートである。$\varepsilon_1 - \varepsilon_4$ は実ルートで、$\varepsilon_2 - \varepsilon_3$ は純虚ルートになる。

$M \simeq U(1) \times SU(1,1)$ の離散系列表現のパラメータ付けを次のようにとる。

$$\widehat{M}_{\mathrm{DS}} = \{(n, D_m^\pm) |\ n \in \mathbb{Z}, m \geq 1\}$$

[21] 12 ページにある極小放物型部分群の場合の正ルート系と比べてみられたい。

ここに $D_m^{\pm}$ は Harish-Chandra のパラメータが m の $SU(1,1) \simeq SL(2,\mathbb{R})$ の離散系列表現であって

$$D_m^{\pm}\big|_{\text{torus}} \simeq \quad \sum_{i=0}^{\infty}{}^{\oplus} \pm(m+2i+1) \text{ (複号同順)}$$

となっている[22]したがって極大尖点的放物型部分群 P からの誘導表現は $\nu \in \mathbb{C}$ として

$$\pi(n, D_m^{\pm}; \nu) = \mathrm{Ind}_P^G \left((n, D_m^{\pm}) \otimes a^{\nu} \otimes 1_N \right)$$

となる。ついでに K-type について見ておくと、

$$\pi(n, D_m^{\pm}; \nu)\big|_K = \mathrm{Ind}_{M\cap K}^K \, (n, D_m^{\pm})\big|_{M\cap K}$$

であって、これは基本的には

$$(SU(2) \times SU(2) \text{ の表現を torus に制限する}) = (\text{weight space 分解の問題})$$

という問題を考えるのと同じである。

以下 <u>D_m^+ の場合のみを扱う</u> ことにする。(D_m^- が難しい訳ではなく、同様なので省く)

Lemma 6.1 $\pi(n, D_m^+; \nu)$ の無限小指標 $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$ は

$$\lambda = \frac{1}{4}(n+2\nu, -n+2m, -n-2m, n-2\nu)$$

で与えられる。

ただしここでも Cayley 変換を通じて $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$ を対角行列上の線型形式と同一視している。具体的には Cayley 変換は次のようにとればよい (前節も参照されたい)。

$$C = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & 1 & \\ & 1 & & \\ \hline 1 & & -1 & \\ & & 1 & \end{array} \right)$$

とおき、 $X \in \mathfrak{h} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$ に対して $\mathbf{c}(X) = C^{-1}XC$ と定義する。行列の形で書くならば

$$\mathbf{c}: \left(\begin{array}{cc|cc} i\theta & & s & \\ & -i\theta+i\delta & & 0 \\ \hline s & & i\theta & \\ & 0 & & -i\theta-i\delta \end{array} \right) \longmapsto \left(\begin{array}{cc|cc} s+i\theta & & & \\ & -i(\theta-\delta) & & \\ \hline & & -i(\theta+\delta) & \\ & & & -s+i\theta \end{array} \right)$$

となる。

さて Speh-Vogan の定理 4.2 よりわかる正則な無限小指標においての既約性についてここでも調べておこう。

[22][redbook, §II.5] 参照。ただしこの解説では Harish-Chandra パラメータ (無限小指標) を離散系列表現のパラメータとして採用しているが、[redbook] では Blattner パラメータ (minimal K-type の最高ウェイト) が採用されているのでパラメータ間に食い違いがある。具体的にはここでいう離散系列 D_m^+ は [redbook] では $\mathcal{D}_{m+1}^+$ と書かれている。

Theorem 6.2 一般化された主系列表現 $\pi(n, D_m^+; \nu)$ の無限小指標が正則であるとき (つまり $\nu \neq \pm n \pm m, \nu \neq 0, m \neq 0$ であるとき)、 $\pi(n, D_m^+; \nu)$ が既約であることと

$$\nu \in \mathbb{Z} \text{ であって } \nu \equiv n + m \pmod 2$$

が成り立つことは同値である。

この定理は極小放物型部分群の場合の定理 4.5 とは可約性の条件がずいぶん異なっているように見えるが、それについて少し述べておこう。まず Speh-Vogan の定理 4.2 の条件のうち複素ルートに関する部分であるが、これは例えばルート $\varepsilon_1 - \varepsilon_3$ と $\varepsilon_2 - \varepsilon_4$ が互いに共役な複素ルートであるからこの二つについて見てみよう。まず $\alpha = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ とおくと、

$$\alpha^\vee(\lambda) = \frac{1}{4}\left((n + 2\nu) - (-n + 2m)\right) = \frac{1}{2}\left(\nu + (n - m)\right) \in \mathbb{Z}$$

が最初の整条件である。このとき $\nu \in \mathbb{Z}$ であって $\nu \equiv n + m \pmod 2$ となることに注意しよう。この条件は $\vartheta\alpha = -(\varepsilon_2 - \varepsilon_4)$ に関する整条件とも一致していることはすぐにわかるだろう。

次に定理 4.2 (a) の条件を考えよう。

$$\langle \alpha, \lambda \rangle = \frac{1}{2}\left((n - m) + \nu\right) > 0 > \langle \vartheta\alpha, \lambda \rangle = \frac{1}{2}\left((n - m) - \nu\right)$$

がその条件であるが、 $\vartheta\alpha$ についても (a) を考えると結局 $(n - m) + \nu$ と $(n - m) - \nu$ が異符号であれば可約であることがわかる。つまり

$$\left((n - m) + \nu\right)\left((n - m) - \nu\right) = (n - m)^2 - \nu^2 < 0, \implies |n - m| < |\nu|$$

がその条件である。これをまとめて、$\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ と $\varepsilon_2 - \varepsilon_4$ に関する可約性の条件は

$$\nu \in \mathbb{Z} \text{ かつ } \nu \equiv n + m \pmod 2, \ |\nu| > |n - m|$$

となる。同様に互いに共役な複素ルート $\varepsilon_1 - \varepsilon_3$ と $\varepsilon_3 - \varepsilon_4$ を考えることにより

$$\nu \in \mathbb{Z} \text{ かつ } \nu \equiv n + m \pmod 2, \ |\nu| > |n + m|$$

が可約性の条件となる。さて残るは実ルート $\alpha = \varepsilon_1 - \varepsilon_4$ だけであるが、これが極小放物型部分群の場合とは様相を異にしている。まず整性の条件は

$$\alpha^\vee(\lambda) = \frac{1}{4}\left((n + 2\nu) - (n - 2\nu)\right) = \nu \in \mathbb{Z}$$

となる。次に α に関する parity condition を考えよう。

実ルート α によって定まる Cayley 変換を $\mathbf{d}_\alpha$ と書く。この Cayley 変換によって得られる Cartan 部分代数は今の場合コンパクト Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}_{\mathrm{cpt}}$ になっている。ルート系 $\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_{\mathrm{cpt}_\mathbb{C}})$ を Ψ_1 と書けば、 α の $\mathbf{d}_\alpha$ による像 $\beta = \mathbf{d}_\alpha(\alpha)$ は Ψ_1 の non-compact ルートである。さて β を単純ルートにするような Ψ_1 の正ルート系を一つ決めよう。たとえば

$$(\Psi_1 \text{ の simple roots}) = \{\beta = \varepsilon_1 - \varepsilon_4, \varepsilon_4 - \varepsilon_3, \varepsilon_3 - \varepsilon_2\}$$

とすればよい。この順序に関して ρ, ρ_c を計算すれば

$$\rho(\Psi_1) = \frac{1}{2}(3, -3, -1, 1), \quad \rho_c(\Psi_1) = \frac{1}{2}(1, -1, -1, 1)$$

なので

$$n_\alpha = \frac{2\langle \beta, \rho(\Psi_1) - 2\rho_c(\Psi_1)\rangle}{\langle \beta, \beta\rangle} = 1.$$

次に、m_α であるが、いまの場合には具体的に

$$m_\alpha = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & & & \\ & 1 & & \\ \hline & & -1 & \\ & & & 1 \end{array}\right) = (-1_4)\cdot\gamma_2$$

となっているので、離散系列表現の m_α における値は

$$(n, D_m^\pm)(m_\alpha) = n(-1_4)\cdot D_m^\pm(\gamma_2) = (-1)^n(-1)^{m+1} = (-1)^{n+m+1}$$

となる。以上から parity condition は

$$(n, D_m^\pm)(m_\alpha) = (-1)^{n_\alpha + 2\langle\alpha,\lambda\rangle/\langle\alpha,\alpha\rangle}, \implies (-1)^{n+m+1} = (-1)^{1+\nu}$$

となり、$\nu \in \mathbb{Z}$ とあわせて $\nu \equiv n + m \pmod 2$ が条件となる。

standard 表現 $\pi(n, D_m^\pm; \nu)$ は以上の 3 条件のうちいずれかを満たせば可約だが、実ルートに関する条件が一番弱くこれさえ満たせば可約になることがわかり、定理 6.2 を得る。

Example 6.3 (1) $\lambda = (\lambda_i)$ が整 (つまり $\lambda_i - \lambda_j \in \mathbb{Z}(\forall i, j)$) ならば $\pi(n, D_m^\pm; \nu)$ は可約。

(2) $\pi(0, D_1^\pm; 2)$ は既約。

7 離散系列とその埋めこみ

放物型部分群として $G = SU(2,2)$ 自身も許されているので、あとは $\widehat{G}_{\mathrm{LDS}}$ の記述が残っていることになる。この部分はよく知られているとは思うが、この論説は入門的解説でもあるので繰り返しておこう。特に $SU(2,2)$ の離散系列表現については [Yamashita 90] が詳しいので、読者はそちらも参照するとよいだろう。後ほど [Yamashita 90] の結果の一部も引用する。

離散系列の分類は最初に指標の理論を用いて Harish-Chandra によって成し遂げられた ([Harish-Chandra 66])。初期のうちにやはり Harish-Chandra によって (反) 正則な離散系列の実現が与えられたが ([Harish-Chandra 56])、一般的には [Narasimhan-Okamoto], [Hotta], [Parthasarathy], [Schmid 70], [Atiyah-Schmid] などの仕事を待たねばならなかった。ここでは分類についてだけ紹介する。

まず既に述べたように離散系列表現が存在することと G がコンパクトな Cartan 部分群を持つということは同値である。 $G = SU(2,2)$ においては対角行列全体がコンパクト Cartan 部分群 H_{cpt} になるので離散系列表現が存在する。そこで正則な無限小指標 $\Lambda \in \sqrt{-1}\ \mathfrak{h}'_{\mathrm{cpt}}$ を取り、さらに $\Lambda + \rho$ が K について整であるとする (つまり K の有限次元表現のウェイトに

なっているとする)。 $\mathfrak{h}_{\mathrm{cpt}}$ は対角行列であるから Λ を成分表示して $\Lambda = (\Lambda_1, \cdots, \Lambda_4)$ と書いておこう。Λ は K について整なので $\Lambda_i \in \mathbb{Z}$ として差し支えない。

$(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathrm{cpt}\mathbb{C}})$ の Weyl 群は 4 次の対称群 $W = \mathfrak{S}_4$ で座標の置換として $\mathfrak{h}_{\mathrm{cpt}}^*$ に働く。一方コンパクトルートに対応する Weyl 群 W_{cpt} は W の部分群であって、群 G に代表元を取れるものに一致する。つまり $W_{\mathrm{cpt}} \simeq N_G(\mathfrak{h}_{\mathrm{cpt}})/Z_G(\mathfrak{h}_{\mathrm{cpt}}) = N_K(\mathfrak{h}_{\mathrm{cpt}})/Z_K(\mathfrak{h}_{\mathrm{cpt}})$ であって、 $W = \mathfrak{S}_4$ の部分群としては $K \simeq S(U(2) \times U(2))$ であることに対応して最初の二つの座標、後ろの二つの座標それぞれの置換全体、つまり $W_{\mathrm{cpt}} = \mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2$ となっている。

Theorem 7.1 (Harish-Chandra) 無限小指標が Λ であるような離散系列表現は有限個存在し、それらは $W/W_{\mathrm{cpt}} = \mathfrak{S}_4/\mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2$ と一対一に対応する。したがって無限小指標が Λ の離散系列表現は 6 個ある。

この定理では実際の離散系列を特定する役には立たないが、これらの離散系列表現は minimal K-type によって区別できるので $SU(2,2)$ の場合にそれを少し見ておこう。

正のルート系の取り方と Weyl 群による基本領域 (Weyl の部屋) は一対一に対応するから結局正則な無限小指標 Λ を一つ決めたときの離散系列はコンパクト正ルートによって決まる正領域に含まれる Weyl の部屋と一対一に対応することになる。今の場合正のコンパクトルートとして

$$\Delta_c^+ = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_3 - \varepsilon_4\}$$

をとると、これに対応して Λ が正の領域にある条件は

$$\langle \Lambda, \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rangle = \Lambda_1 - \Lambda_2 > 0,\ \langle \Lambda, \varepsilon_3 - \varepsilon_4 \rangle = \Lambda_3 - \Lambda_4 > 0$$

となっている。これを満たすような $W = \mathfrak{S}_4$ の軌道は 6 個の元からなり、それぞれに対応する Λ は次のような条件で決まる。

$$\begin{array}{clccl}
\text{(I)} & \Lambda_1 > \Lambda_2 > \Lambda_3 > \Lambda_4 & \qquad & \text{(IV)} & \Lambda_3 > \Lambda_1 > \Lambda_2 > \Lambda_4 \\
\text{(II)} & \Lambda_1 > \Lambda_3 > \Lambda_2 > \Lambda_4 & & \text{(V)} & \Lambda_3 > \Lambda_1 > \Lambda_4 > \Lambda_2 \\
\text{(III)} & \Lambda_1 > \Lambda_3 > \Lambda_4 > \Lambda_2 & & \text{(VI)} & \Lambda_3 > \Lambda_4 > \Lambda_1 > \Lambda_2
\end{array}$$

もちろんこれらの 6 個の元は同じ Weyl 群の軌道に属しているので $\{\Lambda_1, \cdots, \Lambda_4\}$ は集合としては常に一定である[23]。この (I) - (VI) の番号付けは [Yamashita 90] と同じにしてある。 また (I) と (VI) は (反) 正則な離散系列である ([Harish-Chandra 56], [Schmid 75])。

Blattner パラメータ、つまり離散系列表現の唯一つの minimal K-type の最高ウェイト λ は Λ を正にする正ルートを Δ^+ と書けば、

$$\lambda = \Lambda + \rho_n - \rho_c,\ \rho_n = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_n^+} \alpha, \quad \rho_c = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_c^+} \alpha$$

で与えられている。ただし Δ_n^+ は non-compact な正ルート全体、 Δ_c^+ はコンパクトな正ルートの全体を表す。すでに述べたように離散系列表現はその minimal K-type を与えることにより一意に決まるのでこれで離散系列表現が特定できたことになる。

---

[23] A 型のルート系の実現のしかたによって Λ_i 達に一定の数を加えても同じ $(\mathfrak{h}_{\mathrm{cpt}})_{\mathbb{C}}^*$ の元を表わすが、ここではそれについては余り気にしないで簡単に述べてある。

さて次に離散系列の極限 (LDS) についても見ておこう。LDSでは無限小指標がコンパクトなルートに関しては正則でなければならないが、 non-compact なルートに関しては特異であってもよい。このとき特異な無限小指標に関しては正則な無限小指標からの「極限」として得られるわけであるが、この「極限」は Weyl の部屋によって異なるので同じ特異な無限小指標であってもどの部屋からの極限であるかによって違う LDS を表わすことがある。具体的には各離散系列からの極限について記しておくと、

$$
\begin{array}{cl}
\text{(I)} & \Lambda_1 > \Lambda_2 = \Lambda_3 > \Lambda_4 \\
\text{(II)} & \Lambda_1 = \Lambda_3 > \Lambda_2 > \Lambda_4 \\
 & \Lambda_1 > \Lambda_3 = \Lambda_2 > \Lambda_4 \\
 & \Lambda_1 > \Lambda_3 > \Lambda_2 = \Lambda_4 \\
 & \Lambda_1 = \Lambda_3 > \Lambda_2 = \Lambda_4 \\
\text{(III)} & \Lambda_1 = \Lambda_3 > \Lambda_4 > \Lambda_2 \\
 & \Lambda_1 > \Lambda_3 > \Lambda_4 = \Lambda_2 \\
 & \Lambda_1 = \Lambda_3 > \Lambda_4 = \Lambda_2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cl}
\text{(IV)} & \Lambda_3 = \Lambda_1 > \Lambda_2 > \Lambda_4 \\
 & \Lambda_3 > \Lambda_1 > \Lambda_2 = \Lambda_4 \\
 & \Lambda_3 = \Lambda_1 > \Lambda_2 = \Lambda_4 \\
\text{(V)} & \Lambda_3 = \Lambda_1 > \Lambda_4 > \Lambda_2 \\
 & \Lambda_3 > \Lambda_1 = \Lambda_4 > \Lambda_2 \\
 & \Lambda_3 > \Lambda_1 > \Lambda_4 = \Lambda_2 \\
 & \Lambda_3 = \Lambda_1 > \Lambda_4 = \Lambda_2 \\
\text{(VI)} & \Lambda_3 > \Lambda_4 = \Lambda_1 > \Lambda_2
\end{array}
$$

このうち例えば (I) のものと (II) の 2 番目のものは無限小指標を見ていても区別は出来ないが、どの部屋からの「極限」かまで見れば区別できる。そこで以下DSを $DS(\Lambda), DS_{\mathrm{I}}(\Lambda), LDS_{\mathrm{I}}(\Lambda)$ などと書く。

Example 7.2 山下 [Yamashita 90] によって離散系列表現の (一般化された) 主系列表現への埋めこみは $G = SU(2,2)$ の場合には完全に決定されている。この解説の記号に合わせてその結果を紹介しておく。(I) の場合 (つまり正則な離散系列表現) を考えよう。

$$DS_{\mathrm{I}}(\Lambda),\ \Lambda_1 > \Lambda_2 > \Lambda_3 > \Lambda_4$$

は次の主系列表現に重複度 1 で埋めこまれる：

$$DS_{\mathrm{I}}(\Lambda) \hookrightarrow \pi(\Lambda_2 - \Lambda_1 + \Lambda_3 - \Lambda_4, D^{+}_{\Lambda_1 - \Lambda_4}; \Lambda_2 - \Lambda_3).$$

このような埋め込みを全て表にしておこう。まず極大尖点的放物型部分群から誘導された主系列表現 $\pi((n, D^{\pm}_{m}); \nu)$ (§II.6 参照) への離散系列の埋め込みの表を掲げる。

この表では離散系列表現 $DS_{\mathrm{X}}(\Lambda)$ $(\mathrm{X} = \mathrm{I} - \mathrm{VI})$ のすぐ後に埋めこめる主系列表現を列挙してある。二重縦線の右側の記号は山下の記号による主系列の表示 (Weyl 群の元による) である ([Yamashita 90, Theorem 8.2] 参照)。

$DS_{\mathrm{I}}(\Lambda) : \Lambda_1 > \Lambda_2 > \Lambda_3 > \Lambda_4$	
$\pi((-\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 - \Lambda_4, D^{+}_{\Lambda_1 - \Lambda_4}); \Lambda_2 - \Lambda_3)$	$(s_1 s_3 \Lambda_{\mathrm{I}} : +)$
$DS_{\mathrm{II}}(\Lambda) : \Lambda_1 > \Lambda_3 > \Lambda_2 > \Lambda_4$	
$\pi((\Lambda_1 - \Lambda_2 - \Lambda_3 + \Lambda_4, D^{+}_{\Lambda_3 - \Lambda_2}); \Lambda_1 - \Lambda_4)$	$(\Lambda_{\mathrm{I}} : +)$
$\pi((-\Lambda_1 - \Lambda_2 + \Lambda_3 + \Lambda_4, D^{+}_{\Lambda_1 - \Lambda_2}); \Lambda_3 - \Lambda_4)$	$(s_1 \Lambda_{\mathrm{I}} : +)$
$\pi((\Lambda_1 + \Lambda_2 - \Lambda_3 - \Lambda_4, D^{+}_{\Lambda_3 - \Lambda_4}); \Lambda_1 - \Lambda_2)$	$(s_3 \Lambda_{\mathrm{I}} : +)$
$\pi((-\Lambda_1 + \Lambda_2 - \Lambda_3 + \Lambda_4, D^{+}_{\Lambda_1 - \Lambda_3}); \Lambda_2 - \Lambda_4)$	$(s_1 s_2 \Lambda_{\mathrm{I}} : +)$
$\pi((-\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 - \Lambda_4, D^{+}_{\Lambda_1 - \Lambda_4}); \Lambda_3 - \Lambda_2)$	$(s_1 s_3 \Lambda_{\mathrm{I}} : +)$
$\pi((\Lambda_1 - \Lambda_2 + \Lambda_3 - \Lambda_4, D^{+}_{\Lambda_2 - \Lambda_4}); \Lambda_1 - \Lambda_3)$	$(s_3 s_2 \Lambda_{\mathrm{I}} : +)$

$DS_{\mathrm{III}}(\Lambda) : \Lambda_1 > \Lambda_3 > \Lambda_4 > \Lambda_2$	
$\pi((-\Lambda_1 + \Lambda_2 - \Lambda_3 + \Lambda_4, D^+_{\Lambda_1-\Lambda_3}); \Lambda_4 - \Lambda_2)$	$(s_1 s_2 \Lambda_{\mathrm{I}} : +)$
$\pi((\Lambda_1 - \Lambda_2 + \Lambda_3 - \Lambda_4, D^-_{\Lambda_4-\Lambda_2}); \Lambda_1 - \Lambda_3)$	$(s_3 s_2 \Lambda_{\mathrm{I}} : -)$
$DS_{\mathrm{IV}}(\Lambda) : \Lambda_3 > \Lambda_1 > \Lambda_2 > \Lambda_4$	
$\pi((-\Lambda_1 + \Lambda_2 - \Lambda_3 + \Lambda_4, D^-_{\Lambda_3-\Lambda_1}); \Lambda_2 - \Lambda_4)$	$(s_1 s_2 \Lambda_{\mathrm{I}} : -)$
$\pi((\Lambda_1 - \Lambda_2 + \Lambda_3 - \Lambda_4, D^+_{\Lambda_2-\Lambda_4}); \Lambda_3 - \Lambda_1)$	$(s_3 s_2 \Lambda_{\mathrm{I}} : +)$
$DS_{\mathrm{V}}(\Lambda) : \Lambda_3 > \Lambda_1 > \Lambda_4 > \Lambda_2$	
$\pi((-\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 - \Lambda_4, D^-_{\Lambda_1-\Lambda_4}); \Lambda_3 - \Lambda_2)$	$(\Lambda_{\mathrm{I}} : -)$
$\pi((\Lambda_1 + \Lambda_2 - \Lambda_3 - \Lambda_4, D^-_{\Lambda_3-\Lambda_4}); \Lambda_1 - \Lambda_2)$	$(s_1 \Lambda_{\mathrm{I}} : -)$
$\pi((-\Lambda_1 - \Lambda_2 + \Lambda_3 + \Lambda_4, D^-_{\Lambda_1-\Lambda_2}); \Lambda_3 - \Lambda_4)$	$(s_3 \Lambda_{\mathrm{I}} : -)$
$\pi((-\Lambda_1 + \Lambda_2 - \Lambda_3 + \Lambda_4, D^-_{\Lambda_3-\Lambda_1}); \Lambda_4 - \Lambda_2)$	$(s_1 s_2 \Lambda_{\mathrm{I}} : -)$
$\pi((\Lambda_1 - \Lambda_2 - \Lambda_3 + \Lambda_4, D^-_{\Lambda_3-\Lambda_2}); \Lambda_1 - \Lambda_4)$	$(s_1 s_3 \Lambda_{\mathrm{I}} : -)$
$\pi((\Lambda_1 - \Lambda_2 + \Lambda_3 - \Lambda_4, D^-_{\Lambda_4-\Lambda_2}); \Lambda_3 - \Lambda_1)$	$(s_3 s_2 \Lambda_{\mathrm{I}} : -)$
$DS_{\mathrm{VI}}(\Lambda) : \Lambda_3 > \Lambda_4 > \Lambda_1 > \Lambda_2$	
$\pi((\Lambda_1 - \Lambda_2 - \Lambda_3 + \Lambda_4, D^-_{\Lambda_3-\Lambda_2}); \Lambda_4 - \Lambda_1)$	$(s_1 s_3 \Lambda_{\mathrm{I}} : -)$

次に極小放物型部分群から誘導した主系列表現 $\pi((\kappa, n); \nu)$ (§II.4 参照) への埋め込みを列挙しておく。表の見方は上と全く同じである ([Yamashita 90, Theorem 6.1] 参照)。

$DS_{\mathrm{I}}(\Lambda) : \Lambda_1 > \Lambda_2 > \Lambda_3 > \Lambda_4$	
$\pi((-(-1)^{\Lambda_1-\Lambda_4}, -\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 - \Lambda_4); (\Lambda_2 - \Lambda_3, \Lambda_1 - \Lambda_4))$	$s_1 s_3$
$DS_{\mathrm{II}}(\Lambda) : \Lambda_1 > \Lambda_3 > \Lambda_2 > \Lambda_4$	
$\pi((-(-1)^{\Lambda_3-\Lambda_2}, \Lambda_1 - \Lambda_2 - \Lambda_3 + \Lambda_4); (\Lambda_1 - \Lambda_4, \Lambda_3 - \Lambda_2))$	1
$\pi((-(-1)^{\Lambda_1-\Lambda_2}, -\Lambda_1 - \Lambda_2 + \Lambda_3 + \Lambda_4); (\Lambda_3 - \Lambda_4, \Lambda_1 - \Lambda_2))$	s_1
$\pi((-(-1)^{\Lambda_2-\Lambda_3}, \Lambda_1 - \Lambda_2 - \Lambda_3 + \Lambda_4); (\Lambda_1 - \Lambda_4, \Lambda_2 - \Lambda_3))$	s_2
$\pi((-(-1)^{\Lambda_3-\Lambda_4}, \Lambda_1 + \Lambda_2 - \Lambda_3 - \Lambda_4); (\Lambda_1 - \Lambda_2, \Lambda_3 - \Lambda_4))$	s_3
$\pi((-(-1)^{\Lambda_1-\Lambda_3}, -\Lambda_1 + \Lambda_2 - \Lambda_3 + \Lambda_4); (\Lambda_2 - \Lambda_4, \Lambda_1 - \Lambda_3))$	$s_1 s_2$
$\pi((-(-1)^{\Lambda_1-\Lambda_4}, -\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 - \Lambda_4); (\Lambda_3 - \Lambda_2, \Lambda_1 - \Lambda_4))$	$s_1 s_3$
$\pi((-(-1)^{\Lambda_2-\Lambda_4}, \Lambda_1 - \Lambda_2 + \Lambda_3 - \Lambda_4); (\Lambda_1 - \Lambda_3, \Lambda_2 - \Lambda_4))$	$s_3 s_2$

$DS_{\mathrm{III}}(\Lambda) : \Lambda_1 > \Lambda_3 > \Lambda_4 > \Lambda_2$	
$\pi((-(-1)^{\Lambda_4-\Lambda_3}, +\Lambda_1+\Lambda_2-\Lambda_3-\Lambda_4); (\Lambda_1-\Lambda_2, \Lambda_4-\Lambda_3))$	s_2
$\pi((-(-1)^{\Lambda_1-\Lambda_3}, -\Lambda_1+\Lambda_2-\Lambda_3+\Lambda_4); (\Lambda_4-\Lambda_2, \Lambda_1-\Lambda_3))$	s_1s_2
$\pi((-(-1)^{\Lambda_4-\Lambda_2}, \Lambda_1-\Lambda_2+\Lambda_3-\Lambda_4); (\Lambda_1-\Lambda_3, \Lambda_4-\Lambda_2))$	s_3s_2
$DS_{\mathrm{IV}}(\Lambda) : \Lambda_3 > \Lambda_1 > \Lambda_2 > \Lambda_4$	
$\pi((-(-1)^{\Lambda_2-\Lambda_1}, -\Lambda_1-\Lambda_2+\Lambda_3+\Lambda_4); (\Lambda_3-\Lambda_4, \Lambda_2-\Lambda_1))$	s_2
$\pi((-(-1)^{\Lambda_3-\Lambda_1}, -\Lambda_1+\Lambda_2-\Lambda_3+\Lambda_4); (\Lambda_2-\Lambda_4, \Lambda_3-\Lambda_1))$	s_1s_2
$\pi((-(-1)^{\Lambda_2-\Lambda_4}, \Lambda_1-\Lambda_2+\Lambda_3-\Lambda_4); (\Lambda_3-\Lambda_1, \Lambda_2-\Lambda_4))$	s_3s_2
$DS_{\mathrm{V}}(\Lambda) : \Lambda_3 > \Lambda_1 > \Lambda_4 > \Lambda_2$	
$\pi((-(-1)^{\Lambda_1-\Lambda_4}, -\Lambda_1+\Lambda_2+\Lambda_3-\Lambda_4); (\Lambda_3-\Lambda_2, \Lambda_1-\Lambda_4))$	1
$\pi((-(-1)^{\Lambda_3-\Lambda_4}, \Lambda_1+\Lambda_2-\Lambda_3-\Lambda_4); (\Lambda_1-\Lambda_2, \Lambda_3-\Lambda_4))$	s_1
$\pi((-(-1)^{\Lambda_4-\Lambda_1}, -\Lambda_1+\Lambda_2+\Lambda_3-\Lambda_4); (\Lambda_3-\Lambda_2, \Lambda_4-\Lambda_1))$	s_2
$\pi((-(-1)^{\Lambda_1-\Lambda_2}, -\Lambda_1-\Lambda_2+\Lambda_3+\Lambda_4); (\Lambda_3-\Lambda_4, \Lambda_1-\Lambda_2))$	s_3
$\pi((-(-1)^{\Lambda_3-\Lambda_1}, -\Lambda_1+\Lambda_2-\Lambda_3+\Lambda_4); (\Lambda_4-\Lambda_2, \Lambda_3-\Lambda_1))$	s_1s_2
$\pi((-(-1)^{\Lambda_3-\Lambda_2}, \Lambda_1-\Lambda_2-\Lambda_3+\Lambda_4); (\Lambda_1-\Lambda_4, \Lambda_3-\Lambda_2))$	s_1s_3
$\pi((-(-1)^{\Lambda_4-\Lambda_2}, \Lambda_1-\Lambda_2+\Lambda_3-\Lambda_4); (\Lambda_3-\Lambda_1, \Lambda_4-\Lambda_2))$	s_3s_2
$DS_{\mathrm{VI}}(\Lambda) : \Lambda_3 > \Lambda_4 > \Lambda_1 > \Lambda_2$	
$\pi((-(-1)^{\Lambda_3-\Lambda_2}, \Lambda_1-\Lambda_2-\Lambda_3+\Lambda_4); (\Lambda_4-\Lambda_1, \Lambda_3-\Lambda_2))$	s_1s_3

8 standard 表現の K-type

つぎに standard 表現の K-type について見ておこう。

Lemma 8.1 K の既約有限次元表現 $n' \otimes \tau_{\mu_1} \otimes \tau_{\mu_2}$ が極大尖点的放物型部分群 P から誘導した主系列表現 $\pi((n, D_m^+); \nu)$ の K-type であることと次の式を満たす $\exists i \geq 0,\ 0 \leq \exists j_1 \leq \mu_1, 0 \leq \exists j_2 \leq \mu_2$ が存在することは同値である。

$$n' \equiv n \pmod 2, \quad \begin{array}{rcl} 2i &=& 2j_1 - \mu_1 + (n+n')/2 - m - 1 \\ &=& -2j_2 + \mu_2 - (n-n')/2 - m - 1. \end{array}$$

Proof.

$$K = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} e^{i\psi} 1_2 & \\ \hline & e^{-i\psi} 1_2 \end{array} \right) \middle| \ \psi \in \mathbb{R} \right\} \cdot \left\{ \left(\begin{array}{c|c} u_1 & \\ \hline & u_2 \end{array} \right) \middle| \ u_j \in SU(2) \right\}$$

なので K の表現を

$$\widehat{K} \ni n' \otimes \tau_{\mu_1} \otimes \tau_{\mu_2} \, (n' \in \mathbb{Z}, \quad \mu_1, \mu_2 \geq 0 : \text{ highest weights })$$

と書こう。ここに $n' \in \mathbb{Z}$ はトーラス $\mathbb{T} = \{e^{i\psi} |\ \psi \in \mathbb{R}\}$ の表現 $n'(e^{i\psi}) = e^{in'\psi}$ であり、$\tau_\mu \in SU(2)\hat{}$ は highest weight が $\mu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ の $SU(2)$ の表現であって $\dim \tau_\mu = \mu$ となるものである。よく知られているように τ_μ のウェイトは

$$(\text{weights of } \tau_\mu) = \{-\mu, -\mu+2, \cdots, \mu-2, \mu\} = \{\mu - 2j |\ 0 \leq j \leq \mu\}$$

とあらわされ、すべて重複度 1 である。また上の K の積表示は直積ではないので、$n' \equiv \mu_1 + \mu_2 \pmod 2$ という compatibility の条件が必要である事にも注意しておこう。

さて $P = MAN$ を §II.6 で決めた尖点的極大放物型部分群とする。P から誘導した主系列表現 $\pi((n, D_m^+); \nu)$ の K への制限はコンパクト群に関する Frobenius の reciprocity により、

$$\pi((n, D_m^+); \nu)\big|_K \simeq \sum_{\omega \in \widehat{K}}^{\oplus} \left[\omega_{M \cap K} : (n, D_m^+)|_{M \cap K}\right] \omega$$

がわかる。ここで

$$M \cap K = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} e^{i\theta} & & & \\ & e^{-i\theta} & & \\ \hline & & e^{i\theta} & \\ & & & e^{-i\theta} \end{array} \right) \middle| \ \theta \in \mathbb{R} \right\} \times \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & & \\ & e^{i\delta} & & \\ \hline & & 1 & \\ & & & e^{-i\delta} \end{array} \right) \middle| \ \delta \in \mathbb{R} \right\}$$
$$\simeq \mathbb{T} \times \mathbb{T}$$

であってこれは M のコンパクト Cartan 部分群に一致している事に注意しよう。従って (n, D_m^+) のウェイト分解は $(n, D_m^+)|_{M\cap K}$ の分解に一致する。$M \cap K \simeq \mathbb{T} \times \mathbb{T}$ なので $(M\cap K)\hat{} \simeq \widehat{\mathbb{T}} \times \widehat{\mathbb{T}} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ と同一視すれば

$$(n, D_m^+)|_{M \cap K} = \sum_{i=0}^{\infty}{}^{\oplus} (n, m + 2i + 1)$$

である (§II.6 参照)。一方

$$n' \otimes \tau_{\mu_1} \otimes \tau_{\mu_2}|_{M\cap K} = \sum_{\nu_j \in \mathrm{weight}(\tau_{\mu_j})}^{\oplus} (\nu_1+\nu_2, (n'-\nu_1+\nu_2)/2)$$

なので[24]、$\omega = n' \otimes \tau_{\mu_1} \otimes \tau_{\mu_2}$ が $\pi((n, D_m^+); \nu)$ の K-type であることと次の式を満たす $\exists \nu_j \in \mathrm{weight}(\tau_{\mu_j})$ および $\exists i \geq 0$ が存在する事は同値である:

$$\begin{cases} n &= \nu_1+\nu_2 \\ m+2i+1 &= (n'-\nu_1+\nu_2)/2 \end{cases}$$

これを ν_1, ν_2 について解くと、

$$\begin{cases} \nu_1 &= (n+n')/2-m-2i-1 \\ \nu_2 &= (n-n')/2+m+2i+1 \end{cases}$$

となり、さらに $\nu_1 = \mu_1 - 2j_1 \quad (0 \leq j_1 \leq \mu_1)$, $\nu_2 = \mu_2 - 2j_2 \quad (0 \leq j_2 \leq \mu_2)$, とおくことにより補題を得る。 ∎

$\pi((n, D_m^-); \nu)$ に関しては次の補題が成り立つ。

Lemma 8.2 K の表現 $n' \otimes \tau_{\mu_1} \otimes \tau_{\mu_2}$ が $\pi((n, D_m^-); \nu)$ の K-type に現れることと $\exists i \geq 0$ および $0 \leq \exists j_1 \leq \mu_1, 0 \leq \exists j_2 \leq \mu_2$ が存在して次を充たすことは同値である。

$$n' \equiv n \pmod 2, \quad \begin{aligned} 2i &= \mu_1 - 2j_1 - (n+n')/2 - m - 1 \\ &= 2j_2 - \mu_2 + (n-n')/2 - m - 1. \end{aligned}$$

Proof. 上の補題と全く同様にして

$$(n, D_m^-)|_{M\cap K} = \sum_{i=0}^{\infty}{}^{\oplus} (n, -(m+2i+1))$$

であることにより $M \cap K$ の表現 $(n, -(m+2i+1))$ が $n' \otimes \tau_{\mu_1} \otimes \tau_{\mu_2}|_{M\cap K}$ のウェイトになるための条件を書き下したにすぎない。 ∎

$DS_{\mathrm{I}}(\Lambda)$ の埋め込みのある主系列表現で例を計算してみる。一番簡単な場合、$\Lambda = (4,3,2,1)$ とすると、

$$DS_{\mathrm{I}}(\Lambda) \hookrightarrow \pi(0, D_3^+; 1).$$

そこで

$$(0, D_3^+)\big|_{M\cap K} \ni (n, m+2i+1) = (0, 4+2i) \; (i \geq 0)$$

をとって固定する。

$$\widehat{K} \ni n' \otimes \tau_{\mu_1} \otimes \tau_{\mu_2}|_{M\cap K} \supset (0, 4+2i)$$

[24] この (ν_1, ν_2) は主系列表現のパラメータとは関係がない。少し紛らわしい記号であるが、ここだけのことなのでお許しいただきたい。

となる条件は Lemma 8.1 より $n' \equiv 0(\mod 2)$ かつ

$$\begin{array}{rcll} 2i & = & 2j_1 - \mu_1 + n'/2 - 4 & (0 \leq \exists j_1 \leq \mu_1) \\ & = & -2j_2 + \mu_2 + n'/2 - 4 & (0 \leq \exists j_2 \leq \mu_2) \end{array}$$

更に

$$K\text{-length } (n' \otimes \tau_{\mu_1} \otimes \tau_{\mu_2}) = n'^2 + 2(\mu_1 + 2)^2 + 2(\mu_2 + 2)^2$$

を考慮すれば $(n', \mu_1, \mu_2) = (6, 1, 1)$ がただ一つの minimal K-type を与えることがわかる。一方離散系列 $DS_{\mathrm{I}}(\Lambda)$ の minimal K-type は $(8, 0, 0)$ なので $DS_{\mathrm{I}}(\Lambda)$ の minimal K-type は $\pi(0, D_3^+; 1)$ では極小ではないことがわかる。より一般的に次のことが知られている。

Theorem 8.3 ([redbook, Theorem 15.10]) $\pi(n, D_m^+; \nu)$ が 唯一の Langlands 商表現 $J_P(n, D_m^+; \nu)$ を持つ時、$\pi(n, D_m^+; \nu)$ の minimal K-type と Langlands の商表現 $J_P(n, D_m^+; \nu)$ の minimal K-type は一致する。しかも minimal K-type の重複度はすべて 1 である。

また §II.5 と同様にして "$\pi(0, D_3^+; 0)$ は既約である" こともわかる。

Remark. Beilinson-Bernstein 型の standard 加群 (あるいは Harish-Chandra 層) についても minimal K-type は研究されている。たとえば [Chang] を参照されたい。そこでは minimal K-type は special K type と呼ばれている。

Proposition 8.4 (Knapp-Speh) $n \equiv m \pmod 2$ かつ $|n| \neq m$ なら $\pi(n, D_m^+; \nu)$ の minimal K-type は 2 個以上ある。

このとき $\pi(n, D_m^+; 0)$ はたまたま可約であるが、一つの既約表現が複数の minimal K-type を含むことがあるので minimal K-type が 2 個以上あるからと言って $\pi(n, D_m^+; \nu)$ の可約性が出る訳ではない。

Example 8.5 $n \equiv m \pmod 2$ かつ m : 十分大、 $n > 0$ が十分小ならば、$\pi(n, D_m^+; \nu)$ の minimal K-type は

$$(n', \mu_1, \mu_2) = \left(m+2, \frac{m-n}{2}, \frac{m+n}{2}\right), \left(m+4, \frac{m-n}{2} - 1, \frac{m+n}{2} - 1\right)$$

の二つである。

次に極小放物型部分群 P_{m} から誘導された主系列表現 $\pi((\kappa, n); \nu) \quad (\kappa \in \{\pm 1\}, n \in \mathbb{Z}, \nu \in \mathbb{C}^2)$ の K-type について見ておく。

Lemma 8.6 K の既約表現 $n' \otimes \tau_{\mu_1} \otimes \tau_{\mu_2}$ が $\pi((\kappa, n); \nu)$ の K-type に現れるための必要十分条件は $\exists \nu_j \in \mathrm{weight}(\tau_{\mu_j})$ が存在して

$$\nu_1 + \nu_2 = n, \; (-1)^{\nu_1} \sqrt{-1}^{\,n' + \nu_1 + \nu_2} = \kappa$$

が成り立つことである。更にこれは次の条件とも同値である[25]。

$$\mu_1 + \mu_2 \geq |n|, \; \sqrt{-1}^{\,n+n'} = (-1)^{\mu_1} \kappa.$$

[25]最初の weight (ν_1, ν_2) の組がいくつ存在するかによって重複度が与えられる。一方簡単になった 2 番目の条件では重複度まではわからない。

Proof. $P_\mathrm{m} = M_\mathrm{m} A_\mathrm{m} N_\mathrm{m}$ を極小放物型群の Langlands 分解とする (§II.4 参照)。 $K \cap M_\mathrm{m} = M_\mathrm{m}$ であるから、結局 $\omega \in \widehat{K}$ に対して

$$[(\kappa, n) : \omega|_{M_\mathrm{m}}]$$

が ω の $\pi((\kappa, n); \nu)|_K$ における重複度を与える。$\omega = n' \otimes \tau_{\mu_1} \otimes \tau_{\mu_2}$ に対しては $M_\mathrm{m} = \{1, \gamma_2\} \times T$ に関してウェイと分解できて、それは

$$n' \otimes \tau_{\mu_1} \otimes \tau_{\mu_2}|_{\{1,\gamma_2\}\times T} = \sum_{\nu_1 \in \mathrm{weight}(\tau_{\mu_1}), \nu_2 \in \mathrm{weight}(\tau_{\mu_2})}^{\oplus} \left(i^{n'} (-i)^{\nu_1} i^{\nu_2}, \nu_1 + \nu_2 \right)$$

となっている。ここで $i = \sqrt{-1}$ と書いた。第一成分、つまり $\{1, \gamma_2\}^\wedge$ の成分は

$$\gamma_2 = \left(\begin{array}{c|c} i1_2 & \\ \hline & -i1_2 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{cc|cc} -i & & & \\ & i & & \\ \hline & & i & \\ & & & -i \end{array} \right) \in K$$

なる分解より従う。このことから最初の条件式は明らかであろう。この条件式において $\nu_1 = \mu_1 - 2j_1 \quad (0 \le j_1 \le \mu_1)$ などとおいてまとめなおすと

$$\mu_1 + \mu_2 - n = 2(j_1 + j_2),\ \sqrt{-1}^{\,n+n'} = (-1)^{\mu_1} \kappa \, (0 \le \exists j_1 \le \mu_1, 0 \le \exists j_2 \le \mu_2)$$

という条件を得る。ここで $0 \le j_1 + j_2 \le \mu_1 + \mu_2$ であることを考慮すれば、二番目のウェイトを用いない条件式が得られる[26]。 ∎

9 無限小指標が ρ の既約表現たち

最後に今までの結果を full に活用して、無限小指標が ρ の既約表現たち[27]を全て Langlands parameter により記述して minimal K-type の情報などを与えておくことにする。

まず revised Langlands classification (Theorem 1.5) により任意の既約表現は

(a) 離散系列表現 $D_\mathrm{X}(\Lambda)$ $\quad$ (X = I – VI)

(b) 極大尖点的放物型部分群からの誘導表現 $\pi((n, D_m^\pm); \nu)$ $\quad$ ($\mathrm{Re}\,\nu \ge 0$) の既約商表現

(c) 極小放物型部分群からの誘導表現 $\pi((\kappa, n); \nu)$ $\quad$ ($\mathrm{Re}\,\nu_1 \ge \mathrm{Re}\,\nu_2 \ge 0$) の既約商表現

のいづれかである。

(a) 無限小指標が $\rho = (4, 3, 2, 1)$ の離散系列は[28]

$$\begin{aligned} &DS_\mathrm{I}(4,3,2,1), \quad DS_\mathrm{II}(4,2,3,1), \quad DS_\mathrm{III}(4,1,3,2), \\ &DS_\mathrm{IV}(3,2,4,1), \quad DS_\mathrm{V}(3,1,4,2), \quad DS_\mathrm{VI}(2,1,4,3) \end{aligned}$$

[26] parity に関しては $i^{n+n'} = \pm 1$ より $n + n' \equiv 0 \pmod 2$、また K の表現については $n' \equiv \mu_1 + \mu_2 \pmod 2$ であったことに注意すれば確かめられる。

[27] 特に単位表現は無限小指標が ρ である。 ρ は特殊ではあるが、正則かつ整な無限小指標なので比較的よく扱われ基本的である。

[28] 通常は $\rho = 1/2(3, 1, -1, -3)$ とするべきだが、ここでは ρ の各座標を 5/2 だけずらしている。

であってそれぞれの minimal K-type を記しておくと

離散系列	minimal K-type	K-length
$DS_{\mathrm{I}}(4,3,2,1)$	$8 \otimes \tau_0 \otimes \tau_0$	82
$DS_{\mathrm{II}}(4,2,3,1)$	$4 \otimes \tau_2 \otimes \tau_2$	80
$DS_{\mathrm{III}}(4,1,3,2)$	$0 \otimes \tau_4 \otimes \tau_0$	80
$DS_{\mathrm{IV}}(3,2,4,1)$	$0 \otimes \tau_0 \otimes \tau_4$	80
$DS_{\mathrm{V}}(3,1,4,2)$	$(-4) \otimes \tau_2 \otimes \tau_2$	80
$DS_{\mathrm{VI}}(2,1,4,3)$	$(-8) \otimes \tau_0 \otimes \tau_0$	82

となっている。もちろん全てユニタリ表現である。

(b) 極大尖点的放物型部分群 P からの誘導表現 $\pi((n, D_m^{\pm}); \nu)$ $(\mathrm{Re}\,\nu \geq 0)$ で無限小指標が ρ のものは以下の 12 個ある。これらは実際には $\mathrm{Re}\,\nu > 0$ を満たすので revised version ではない通常の Langlands の商表現を持ち、全て相異なった既約商表現 $J_P((n, D_m^{\pm}); \nu)$ を与える。このとき $J_P((n, D_m^{\pm}); \nu)$ の minimal K-type と $\pi((n, D_m^{\pm}); \nu)$ のそれとは一致する (Theorem 8.3) が、それも同時に与えてある。

主系列	minimal K-type	K-length	J_P の unitary 性
$\pi((0, D_1^{\pm}); 3)$	$(\pm 4) \otimes \tau_0 \otimes \tau_0$	32	$\times$
$\pi((\pm 2, D_2^{\pm}); 2)$	$(\pm 4) \otimes \tau_0 \otimes \tau_2$	56	unitary
$\pi((\mp 2, D_2^{\pm}); 2)$	$(\pm 4) \otimes \tau_2 \otimes \tau_0$	56	unitary
$\pi((0, D_3^{\pm}); 1)$	$(\pm 6) \otimes \tau_1 \otimes \tau_1$	72	unitary
$\pi((\pm 4, D_1^{\pm}); 1)$	$(\pm 2) \otimes \tau_1 \otimes \tau_3$	72	unitary
$\pi((\mp 4, D_1^{\pm}); 1)$	$(\pm 2) \otimes \tau_3 \otimes \tau_1$	72	unitary

この一覧表において <u>複号は同順であり</u>、したがって各表現 $(\pi(\cdots)$ および $J_P(\cdots))$ はただ一つの minimal K-type を持つ ([Knapp-Speh, §3.2.a] 参照[29])。ユニタリ性については [Knapp-Speh] の結果を適用したにすぎない。

(c) 極小放物型部分群 P_{m} からの誘導表現 $\pi((\kappa, n); \nu)$ $(\mathrm{Re}\,\nu_1 \geq \mathrm{Re}\,\nu_2 \geq 0)$ で無限小指標が ρ となるものは

$$\pi((\kappa, 0); (3,1)), \quad \pi((\kappa, \pm 2); (2,2)), \quad \pi((\kappa, \pm 4); (1,1))\ (\kappa \in \{\pm 1\})$$

の計 10 個あるが、このうち $\pi((\kappa, 2); (2,2))$ と $\pi((\kappa, -2); (2,2))$ は同値な表現を与えることがわかる。同様のことが $\pi((\kappa, \pm 4); (1,1))$ でも言えるから、結局次の表に挙げる 6 個の表現を考えればよい。この表においては <u>複号は重複していることを表しており</u>、$\pi((-, 0); (3,1))$ は 2 個の minimal K-type を、$\pi((-, 2); (2,2))$ および $\pi((-, 4); (1,1))$ はそれぞれ 4 個の minimal K-type を持つ。残りの二つの表現はただ一つの minimal K-type を持っている ([Knapp-Speh,

[29]] ただし離散系列表現 $D_m^{\pm}$ の parameter は食い違っていることに注意。[Knapp-Speh] での $D_k^{\pm}$ (Blattner parameter) が我々の $D_{k-1}^{\pm}$ (Harish-Chandra parameter) に相当する。

§3.3.a] 参照)。

主系列	minimal K-type	K-length	$J_{P_{\mathrm{m}}}$ の unitary 性
$\pi((+,0);(3,1))$	$0\otimes\tau_0\otimes\tau_0$	16	unitary
$\pi((-,0);(3,1))$	$(\pm2)\otimes\tau_0\otimes\tau_0$	20	$\times$
$\pi((+,2);(2,2))$	$0\otimes\tau_1\otimes\tau_1$	36	$\times$
$\pi((-,2);(2,2))$	$(\pm2)\otimes\tau_1\otimes\tau_1$	40	$\times$
	$0\otimes\tau_0\otimes\tau_2$		
	$0\otimes\tau_2\otimes\tau_0$		
$\pi((+,4);(1,1))$	$0\otimes\tau_2\otimes\tau_2$	64	unitary
$\pi((-,4);(1,1))$	$(\pm2)\otimes\tau_2\otimes\tau_2$	68	$\times$
	$0\otimes\tau_1\otimes\tau_3$		
	$0\otimes\tau_3\otimes\tau_1$		

これらの Langlands 既約商表現は全て異なっていてそれを $J_{P_{\mathrm{m}}}((\kappa,n);\nu)$ と書こう。もちろん $J_{P_{\mathrm{m}}}((+,0);(3,1))$ は G の単位表現を表す。また $\pi((-,4);(1,1))$ は既約な主系列表現なので $J_{P_{\mathrm{m}}}((-,4);(1,1))=\pi((-,4);(1,1))$ である。その他の主系列についてはすべて可約であるので $J_{P_{\mathrm{m}}}(\cdots)\neq\pi(\cdots)$ となっている。いづれにしても Langlands 商表現と主系列表現の minimal K-type は一致しているからこの表は $J_{P_{\mathrm{m}}}(\cdots)$ の minimal K-type の表でもある。

最後に離散系列の埋め込みを主系列を主体として表にまとめておく。

極大放物型部分群 P		極小放物型部分群 P_{m}	
$\pi((0,D_1^+);3)$	II	$\pi((+,0);(3,1))$	II, V
$\pi((0,D_1^-);3)$	V	$\pi((-,2);(2,2))$	II, V
$\pi((0,D_3^+);1)$	I, II	$\pi((+,4);(1,1))$	II, III, IV, V
$\pi((0,D_3^-);1)$	V, VI	$\pi((+,0);(1,3))$	I, II, V, VI
$\pi((\pm2,D_2^+);2)$	II	$\pi((+,0);(3,-1))$	II, III, IV, V
$\pi((\pm2,D_2^-);2)$	V		
$\pi((4,D_1^+);1)$	II, IV		
$\pi((4,D_1^-);1)$	III, V		
$\pi((-4,D_1^+);1)$	II, III		
$\pi((-4,D_1^-);1)$	V, IV		

ここでよく知られた $SU(1,1)\simeq SL(2,\mathbb{R})$ の主系列表現の分解から次の主系列同志の埋め込みがわかる。

$$
\begin{array}{ccc}
\pi((0,D_1^{\pm});3) & \hookrightarrow & \pi((+,0);(3,1)) \\
\pi((2,D_2^{\pm});2) & \hookrightarrow & \pi((-,2);(2,2)) \\
\pi((4,D_1^{\pm});1) & \hookrightarrow & \pi((+,4);(1,1))
\end{array}
$$

いづれの場合にも右端の主系列への離散系列 DS_{X} の埋め込みは左端の系列への埋め込みから誘導されたものであることがわかる。

ここでは

1. standard 表現 (その定義には Langlands-Knapp-Zuckerman, Vogan-Zuckerman, Beilinson-Bernstein などの表面的には異なる流儀がある)
2. $SU(2,2), Sp(2,\mathbb{R})$ の主系列 (離散系列) 表現

の二つに関連している文献に絞ってリストアップし、それに西山の個人的な感想を付け加えた。このうち 1 に関してはすべてを列挙するのは不可能であり、もし列挙するとなれば半単純群の表現論に関する論文は多かれ少なかれこの話題と関係の無いものはないとも言える。したがってここでは主な文献と西山の話に関係するものだけを選ばせていただいた。もちろん 2 のリストにしても (例によって) 完全なものではないし、1・2 の感想の部分も的外れなものがあるかもしれない。これらはすべて西山の知識の不完全さが理由である。しかも正直に告白するとすべての論文を読んだわけではなく、単にざっと目を通しただけのものが大半である。その意味でも間違いは多いかもしれないのでみなさんのご教示があることを期待している。

以下記号として G を半単純リー群またはしばしば簡約型のリー群、 $K \subset G$ を極大コンパクト部分群、 $P = MAN$ を放物型部分群の Langlands 分解とする。 P はしばしば尖点的、あるいは極大と仮定される。また記号的には少し紛らわしいが $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ は Cartan 分解であって $\mathfrak{p}$ は P のリー環では <u>ない</u>。最後に X で $G_{\mathbb{C}}$ の旗多様体を表わす。

References

[Atiyah-Schmid] M. Atiyah and W. Schmid, A geometric construction of the discrete series for semisimple Lie groups, Invent. Math., **42**(1977), 1 – 62.

[Barbasch-Vogan] D. Barbasch and D. A. Vogan, Jr., Reducibility of standard representations, Bull. AMS, **11** (1984), 383 – 385.

Speh-Vogan [Speh-Vogan] で陰伏的には証明されていた generalized principal series の可約性をある種のルート系 (= critical root system) の存在に帰する方法が述べられている。ただし証明はほとんど無い。このようにルート系の存在条件に直すことによって既約性の証明が簡略化される場合が $G = GL(n, \mathbb{R})$ の場合に述べられている。

[Beilinson-Bernstein] A. Beilinson and J. N. Bernstein, Localisation de $\mathfrak{g}$-modules, C. R. Acad. Sci. Paris, **292**(1981), 15 – 18.

[BGG] I. N. Bernshtein, I. M. Gelfand and I. S. Gelfand, Models of representations of compact Lie groups, Funct. Analysis and its Appl., **9** (1975), 322 – 324.

放物型部分群からの誘導表現の K-type を調べるには結局 K の部分群 $K \cap M$ からの表現を調べることになる。このとき誘導表現の K-type が重複度 1 になるかどうかはいろいろな判定条件があるが、ここでは involutive subgroup からの誘導表現が重複度 1 にな

[30]この文献表は研究会の当日にアブストラクト代わりに配布したものに少し手を加えた。したがって本文には引用されていない文献も多い。また新しく追加した文献も多いのだが、十分な時間もなく筆者が力尽きてコメントをつけきれなかったものもある。それゆえコメントがないことには特に深い意味はない。

るためにはどの様な表現を誘導すればよいかについて調べられている。このような表現は fine と呼ばれ、 Vogan の lowest K-type を用いた表現の分類理論の核になってゆく。

[Bernstein] J. N. Bernstein, On the support of Plancherel measure, J. Geom. Phys., **5**(1988), 663 – 710.

[Casselman-Miličić] W. Casselman and D. Miličić, Asymptotic behavior of matrix coefficients of admissible representations, Duke Math. J., **49**(1982), 869 – 930.

[Chang] J.-T. Chang, Special K-types, tempered characters and the Beilinson-Bernstein realization, Duke Math. J., **56** (1988), 345 – 383.

Beilinson-Bernstein 流の旗多様体上の $\mathfrak{D}$-加群を用いた standard 表現についての詳しい情報が得られる。例えば Vogan の lowest K-type の情報や、 Knapp-Zuckerman の tempered 表現の分類などが Beilinson-Bernstein の standard 表現を使って再証明されている。この論文は Hecht-Miličić-Schmid-Wolf [HMSW] の応用の一つであるとも言えるが、 standard 表現間の duality, intertwining 作用素などが極めて詳細に記述されていて便利かもしれない。 $\mathfrak{D}$-加群の基本的な知識は仮定されている。 Mirković の学位論文 [Mirković] も参照されたい。

[Harish-Chandra 54] Harish-Chandra, Representations of semisimple Lie groups II, Trans. AMS, **76**(1954), 26 – 65.

[Harish-Chandra 56] Harish-Chandra, Representations of semisimple Lie groups V, Amer. J. Math., **78**(1956), 1 – 41.

[Harish-Chandra 66] Harish-Chandra, Discrete series for semisimple Lie groups II, Acta Math., **116**(1966), 1 – 111.

[HMSW] H. Hecht, D. Miličić, W. Schmid and J. A. Wolf, Localization and standard modules for real semisimple Lie groups I: The duality theorem, Invent. Math., **90** (1987), 297 – 332.

Vogan-Zuckerman による cohomological induction を用いて定義された standard module と Beilinson-Bernstein による旗多様体上の $K_{\mathbb{C}}$-equivariant な $\mathfrak{D}$-加群によって定義された standard module が実は互いに双対表現になっていることを証明したもの。既約性とかユニタリ性に関する双方の結果が使えるようになるので応用の幅は広い。 $\mathfrak{D}$-加群および Vogan-Zuckerman の理論が前提になっているので内容を完全に理解するにはかなりの知識を必要とする (筆者には荷が重い)。また双対性を記述するには旗多様体上の $G_{\mathbb{R}}$ 軌道と $K_{\mathbb{C}}$ 軌道の対応 (松木対応) が用いられるが、この部分についてはむしろ Schmid の論文 [Schmid 91] を参照するのがよいだろう。

[Hiraga] 平賀郁, On the multiplicities of the discrete series representations of $Sp_2(\mathbb{R})$, 1993 保型形式シンポジウム報告集 (城崎), pp. 33 – 46.

K. Hiraga, On the multiplicities of the discrete series representations of $Sp_2(\mathbb{R})$, preprint, Kyoto University, Kyoto-Math 93-06.

この論文については保型形式の専門家の方の方が内容は良くご存じだろう。保型形式の次元を計算する際に trace formula の spectral side の具体的な形が問題になる。その計

算には $(\mathfrak{g}, K)$-cohomology から決まる既約認容表現の重複度が必要である。この論説では $Sp_2(\mathbb{R})$ に対して重複度の計算が Vogan, Nzoukoudi の結果を用いて具体的になされている。また $SU(2,2)$ については本研究会で報告された。

[Howe-Tan] R. E. Howe and E.-C. Tan, Homogeneous functions on light cone: The infinitesimal structure of some degenerate principal series representations, Bull. AMS, **28** (1993), 1 – 74.

符号が (p,q) の光錐上の関数を考えることにより $G = O(p,q), U(p,q), Sp(p,q)$ の (Siegel 型ではない) 極大放物型部分群から誘導された退化主系列表現の実現が与えられる。このような実現は表現の性質を研究する上で非常に便利である。たとえば K-type への分解は古典的な球面調和関数によって与えられるのでほとんど議論を必要としない。また $\mathfrak{p}$ の作用も極めて具体的に書けるので composition factor やユニタリ性についてもほとんど完全な情報が得られる。文献も充実しているので参考にされたい。

[Hotta] R. Hotta, On realization of the discrete series for semisimple Lie groups, J. Math. Soc. Japan, **23**(1971), 384 – 407.

離散系列表現の実現には岡本清郷、堀田良之の二人が日本人では大きな貢献をしている。実際その核となった論文は [Narasimhan-Okamoto] およびこの堀田の論文である。離散系列の実現の歴史についてはこの論文の Introduction に詳しいが、先駆的な仕事となった [Narasimhan-Okamoto] では G/K が Hermite 対称空間のときに離散系列の実現が与えられ、 [Hotta] では一般の G について “十分” 正則な無限小指標を持つ離散系列表現が Casimir 微分作用素の固有空間として実現されている。同時期に Schmid [Schmid 70] および Parthasarathy [Parthasarathy] によってもほぼ同様の結果が独立に得られている。[Schmid 70] および [Parthasarathy] では後に [Yamashita 90, Yamashita 91] で中心的に用いられる一階の微分作用素[31]が用いられているが、これは Casimir 作用素の平方根のようなものであり、この 3 つの論文の間に本質的な差異はない。

離散系列表現については平井武による大域指標の決定 (T. Hirai, The characters of the discrete series for semisimple Lie groups, J. Math. Kyoto Univ., **21**(1981), 471 – 500.) の仕事もあり、日本人にとっては馴染みの深い分野となった。岡本 (1935 生)、堀田 (1941 生)、平井 (1936 生) という年代も近い 3 人が日本の表現論史上に残した足跡は極めて大きい (岩波数学事典 **411** 参照)。

[Johnson 90] K. D. Johnson, Degenerate principal series and compact groups, Math. Ann., **287** (1990), 703 – 718.

$G = Spin_0(n,n), SU(n,n), Sp(n,n)$ の時に Siegel type の極大放物型部分群から一次元表現を誘導したときの退化主系列表現の構造について詳しく調べている。特にこの場合は $(K, M \cap K)$ が対角型の symmetric pair になるので K-type はすべて重複度 1 であり、よくわかっている。あとは $\mathfrak{p}$ の作用を具体的に書き下すだけであるが、ちょっとした工夫により $\mathfrak{p}$ そのものではなくその中の一次元部分空間の作用を見ればよい、という観点から計算がなされている。退化主系列の composition factor だけでなく Jordan-Hölder 列の詳細も得られている。

[Johnson 92] K. D. Johnson, Degenerate principal series on tube type domains, Contemp. Math., **138** (1992), 175 – 187.

[31] Schmid's operator 又は Dirac operator、あるいは山下の最近の用語によれば gradient 型微分作用素。

Johnson [Johnson 90] の結果を G/K が tube type の Hermite 対称空間である場合に拡張したもの。議論はより一般的になっているが、その分だけ抽象化され本質が見えにくくなっているような気がする。

[Knapp] A. W. Knapp, Langlands classification and unitary dual of $SU(2,2)$, in *Applications of group theory in physics and mathematical physics* (ed. M. Flato, P. Sally and G. Zuckerman), pp. 209 – 217, Lectures in Applied Mathematics **21**, AMS, 1985.

$SU(2,2)$ の既約ユニタリ表現の決定を扱った B. Speh との共著論文の要約。しかしこちらのほうが短く簡潔に急所がまとめられていてわかりやすい。また Langlands classification についての簡潔な要約とユニタリ表現か否かを判定する手法の解説は理論の心臓部をいきなり掴んだよい解説でもある ($SU(2,2)$ に限らず一般的に述べてある)。

[redbook] A. W. Knapp, *Representation theory of semisimple Lie group — An overview based on examples*, Princeton Univ. Press, 1986.

Harish-Chandra に代表される半単純リー群の Plancherel の定理と既約認容表現の分類を具体的な例を交えて解説した大著。特にその主眼は Plancherel の定理にある。 Stein との共同の仕事である intertwining 作用素の理論、 Zuckerman との共同の仕事である tempered な既約表現の分類理論、 minimal K-type (lowest K-type と同じ) の記述、ユニタリ表現の Langlands パラメータの決定など Knapp 自身のやって来た仕事も後半にまとめられていて便利である。しかし cohomological induction, $\mathfrak{D}$-加群を使った既約認容表現の分類などについては一切触れられていない。筆者のこの本の書評が雑誌「数学」(**44**(1992), p.183) にあるのでそちらも参照されたい。

[yellowbook] A. W. Knapp, *Lie groups, Lie algebras, and cohomology*, Math. Notes **34**, Princeton Univ. Press, 1988.

前半はコンパクト群、特に $U(n)$ の表現論を扱っていて大学院初年級のためのよい教科書と言える。しかし後半の 2 章は non-compact 半単純群に話題を移し Zuckerman の cohomological induction の絶好の紹介となっている。扱い方も具体的であり、 K-type の重複度を与える Blattner formula までが証明される。しかしユニタリ性、既約性についてはほとんど触れられていないのは残念である。

[Knapp-Speh] A. W. Knapp and B. Speh, Irreducible unitary representations of $SU(2,2)$, J. Funct. Anal., **45** (1982), 41 – 73.

$SU(2,2)$ の既約ユニタリ表現の決定を扱った論文。基本的な戦略はまず Langlands の商表現をパラメータによって決定し、そのどれがユニタリであるかを主に補系列表現とその端点という観点から分類したもの。ユニタリかどうかの判定条件には Knapp と Stein によって詳細に研究された (一般化された) 主系列表現間の intertwining 作用素の正定値性が用いられている。記述は具体的なので Langlands の商表現の具体例を見るにも絶好の論文と言える。

[Knapp-Zuckerman] A. W. Knapp and G. J. Zuckerman, Classification of irreducible tempered representations of semisimple groups, Ann. of Math., **116**(1982), 389 – 501. (Correction: **119**(1984), p. 639).

[Kobayashi] T. Kobayashi, *Singular unitary representations and discrete series for indefinite Stiefel manifolds* $U(p,q;\mathbb{F})/U(p-m,q;\mathbb{F})$, Memoirs of AMS **462**, AMS, 1992.

derived functor modules に関する仕事を小林は精力的に続けているが、この小冊子では等質空間上の解析において derived functor modules が離散系列として果たすべき役割と具体的な例とが美事に提示されている。

[Lee-Zhu] S. T. Lee and C. Zhu, Degenerate principal series and local theta correspondence, preprint, Research Report **640** (1994), National University of Singapore.

reductive dual pair $U(p,q) \times U(n,n) \subset Sp(4(p+q)n, \mathbb{R})$ を用いて $U(p,q)$ の p 部分の determinant character に対応する $U(n,n)$ の表現を研究している。この表現は自然に $U(n,n)$ の Siegel 放物型部分群から誘導された退化主系列に埋めこむことが出来る。さらに $U(n,n)$ の退化主系列の構造は S. T. Lee [Lee] によって研究されているので K-type を比較することによってその composition factor の情報がわかる。この論文の主眼点はその様な埋めこみによって退化主系列の composition factor を特定することにある。少なくともこの特殊な状況ではその試みは大成功を収めているようである。

[Langlands] R. P. Langlands, On the classification of irreducible representations of real algebraic groups, in *Representation theory and harmonic analysis on semisimple Lie groups* (ed. P. J. Sally, Jr., and D. A. Vogan, Jr.), pp. 101 – 170, Math. Surveys and Monographs **31**, AMS, 1989.

tempered な表現の parabolic induction とその商表現を取ることにより半単純群の既約認容表現を分類するという基本的な枠組みを確立した論文。ながらくノートの形でしか出まわっていなかったが、 1989 年にようやく印刷になった。論文集につけられた Introduction に歴史とそれからの進展が要にして簡潔にまとめられているのでそちらも参照されたい。

[Lee] S. T. Lee, On some degenerate principal series representations of $U(n,n)$, J. Funct. Anal., **126**(1994), 305 – 366.

Siegel parabolic から誘導された $U(n,n)$ の退化主系列については多数の研究がある。中でも Johnson [Johnson 90] と Howe-Tan [Howe-Tan] でかなり詳しい結果が報告されている。この論文では退化主系列の K-type そのものを特定しその $\mathfrak{p}$ の遷移作用が詳細に研究されている。この論文を手に入れるのが遅かったので細部までは確認する隙がなかったが、おおよそ Oda [Oda], Miyazaki-Oda [Miyazaki-Oda] の K-type に対する計算に匹敵する計算を $U(n,n)$ でも行っている。その結果、退化主系列表現の composition factor の情報が詳細にわかる。 composition factor が Pascal の三角形状に並ぶという結果は (予想されたこととはいえ) なかなかおもしろい。($U(n,1)$ でもこの状況は同じである、拙著 K. Nishiyama, Algebraic structures on virtual characters of a semisimple Lie group, Adv. Stud. Pure Math., **14** (1988), 417 – 468 を参照されたい。)

[Matsuki] T. Matsuki, The orbits of affine symmetric spaces under the action of minimal parabolic subgroups, J. Math. Soc. Japan, **31**(1979), 331 – 357.

T. Matsuki, Orbits on affine symmetric spaces under the action of parabolic subgroups, Hiroshima Math. J., **12**(1983), 307 – 320.

[Matumoto 88] H. Matumoto, Cohomological Hardy space for $SU(2,2)$, Adv. Stud. in Pure Math., **14** (1988), 469 – 497.

Kashiwara-Vergne (M. Kashiwara and M. Vergne, Functions on the Shirov boundary of the generalized half plane, LNM **728** (1979)) では $SU(n,n)$ の退化したユニタリ主系列の表現を $n+1$ 個の既約成分に分解したが、そのうち二つは (反) 正則な関数の極限として得られるもので、その退化主系列への埋めこみは単に Shirov 境界への境界値を取ることで実現されていた。この論文では残る一つの既約成分の埋め込みが "cohomological Hardy space" の Shirov 境界への境界値写像として得られることを示した。(これは次の論文の Introduction からの受け売り)

[Matumoto 88] H. Matumoto, On the representations of $U(m,n)$ unitarily induced from derived functor modules, preprint.

derived functor module $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ からのユニタリな parabolic induction の既約分解が derived functor module の和で表わされることを $G = U(m,n)$ の場合に示したもの。このような parabolic induction を generalized unitary degenerate series と呼び、その一番基本的な例は Kashiwara-Vergne による退化したユニタリ主系列の既約分解である。一般には Borel とは限らない放物型部分群からの cohomological induction を扱うことになるので standard 表現よりさらに広い種類の表現を扱うことになる。語り口は直裁であり、記号的にも洗練されていて初心者にもわかりやすい論文となっている。

[Miličić] D. Miličić, Intertwining functors and irreducibility of standard Harish-Chandra sheaves, in *Harmonic analysis on reductive groups* (ed. W. Barker and P. Sally), pp. 209 – 222, Progress in Math. **101**, Birkhäuser, 1991.

[Mirković] I. Mirković, Classification of irreducible tempered representations of semisimple groups, Ph. D. dissertation, The University of Utah, August 1986.

この学位論文の結果は J.-T. Chang の論文 [Chang] と重複する部分が多く、本質的には二つの論文は (独立に) ほとんど同じことをやっているといってもよい。こちらは学位論文なので、見通しもよく定義なども初学者向きに書かれているような気がする。しかしやはり $\mathfrak{D}$-加群の初歩は仮定されている。

[MUV] I. Mirković, T. Uzawa and K. Vilonen, Matsuki correspondence for sheaves, Invent. Math., **109**(1992), 231 – 245.

松木対応は例えば本文中にも書いたが、旗多様体 X 上の $G_{\mathbb{R}}$ 軌道と $K_{\mathbb{C}}$ 軌道の間の自然な対応を指す[32]。これはもちろん松木 [Matsuki] の結果であるが、この論文では moment 写像を使った力学系の理論を用いて松木対応が幾何的に見通しのよい形で証明されている。更に対応そのものが幾何的に解釈されたことから自然とそれは X 上の $G_{\mathbb{R}}$-equivariant な $\mathfrak{D}_X$-加群 のカテゴリー $D_{G_{\mathbb{R}}}(X)$ と $K_{\mathbb{C}}$-equivariant な $\mathfrak{D}_X$-加群 のカテゴリー $D_{K_{\mathbb{C}}}(X)$ の間のカテゴリー同値を導く (柏原の予想の解決)。Beilinson-Bernstein の定理によって無限小指標が ρ の Harish-Chandra 加群のカテゴリーと $D_{K_{\mathbb{C}}}(X)$ はやはりカテゴリー同値であることが知られているからこれでこの 3 つのカテゴリーはすべて同値でその具体的な同値対応もわかる。

最初の moment 写像を用いた軌道の対応の証明の部分は宇澤のアイディアが大きな役割を果たしているようで、その非凡な発想 (と同時に自然な発想でもあるが) は注目に値すると思う。

[32] もっと一般に可換な二つの involution がある場合にも旗多様体上の軌道の間に同様の対応がある。詳しくは原論文を参照されたい。

[Narasimhan-Okamoto] M. S. Narasimhan and K. Okamoto, An analogue of the Borel-Weil-Bott theorem for hermitian symmetric pairs of non-compact type, Ann. of Math., **91**(1970), 486 – 511.

[Hotta] の項参照。

[Nzoukoudi] B. Nzoukoudi, Représentations irréductibles unitaires de $Sp(2,\mathbb{R})$, C. R. Acad. Sc. Paris, Série I, **297** (1983), 451 – 454.

$Sp(2,\mathbb{R})$ の既約ユニタリ表現を Langlands パラメータによって分類したもの。方針はたぶん Knapp 達のものと同じと思われるが、結果だけで証明は無い。

[Miyazaki-Oda] T. Miyazaki and T. Oda, Principal series Whittaker functions on $Sp(2;\mathbb{R})$ – Explicit formulae of differential equations –, preprint, RIMS-951, November 1993.

T. Miyazaki and T. Oda, Principal series Whittaker functions on $Sp(2;\mathbb{R})$ II, preprint, RIMS-992, September 1994.

この二つの論文の内容は保型形式の専門家の方たちの方がよくご存じだと思うのでここでの論評は控えさせていただく。主系列表現に限っていうならば (もちろんそれはこの二つの論文の主題ではないが)、非常に具体的な実現と K-type の $\mathfrak{p}$ による遷移が応用しやすい形で計算されており、(繰り返しになるが、それがこの論文の主題ではないにも関らず) 主系列表現を用いて計算を行う者にとって役に立つだろう。

[Ochiai] 落合啓之 (示野信一記), 指標の幾何的計算方法, 数理解析研究所講究録, **826** (1993), 55 – 67.

G の Harish-Chandra 加群は Beilinson-Bernstein 対応により旗多様体上の $K_{\mathbb{C}}$ equivariant な $\mathfrak{D}$-加群と対応し、さらに Riemann-Hilbert 対応によって $K_{\mathbb{C}}$ equivariant perverse sheaf と対応している。Ochiai (H. Ochiai, Character and character cycles, J. Math. Soc. Japan, **45**(1993), 583 – 598) では対応する $K_{\mathbb{C}}$ equivariant perverse sheaf から表現の大域指標の値を幾何的な情報を用いて計算する方法を与えた。この論説では $G = Sp(2,\mathbb{R})$ の場合に standard 表現の指標を具体的に計算して (その値がどの様な幾何的な意味を持つかがよくわかる) その一覧表を作成している。

落合啓之, $SU(2,2)$ における旗多様体上の $K_{\mathbb{C}}$-orbit と Bruhat cell との共通部分について, 数理解析研究所講究録, **826** (1993), 98 – 117.

上の論説とまったく同様のことを $SU(2,2)$ で行っている。こちらの作業の方がはるかに大変であるが、有限体上の幾何 (ひいては表現論?) との関係もうかがえる結果でなかなかおもしろい。ただし解説部分は必要最小限で、その説明のほとんどは前記論説の方にある。

[Oda] T. Oda, An explicit integral representation of Whittaker functions on $Sp(2;\mathbb{R})$ for the large discrete series representations, Tôhoku Math. J., **46** (1994), 261 – 279.

standard 表現の一番原始的な形は極小放物型部分群からの誘導表現と離散系列表現である。離散系列表現は Schmid 作用素の核として実現する方法があり、山下の方法にならってここでも Schmid 作用素が Whittaker 関数を特徴付ける微分方程式として具体的に計算されている。もちろん論文の主眼は Whittaker 関数の決定とその具体的な積分表示にあるが、離散系列表現の K-type の計算などにおける計算は参考にするべき点は多い。

[Parthasarathy] R. Parthasarathy, Dirac operator and the discrete series, Ann. Math., **96**(1972), 1 – 30.

[Hotta] の項参照。

[Speh-Vogan] B. Speh and D. A. Vogan, Reducibility of generalized principal series representations, Acta Math., **145** (1980), 227 – 299.

Knapp-Zuckerman の結果により Langlands の商表現は結局 (limits of) discrete series の尖点放物型部分群からの誘導表現を考えればよいことになった。そのような一般化された主系列表現がいつ既約になるか、という問題が扱われている。無限小指標が正則の場合には既約性の必要十分条件が得られる (無限小指標が特異な場合にでも十分満足する結果が得られている)。また表現のユニタリ性、 composition factor についても考察がなされている。ここで使われている道具は lowest K-type の理論と (Schmid identity も含んだ) τ-invariant の理論である。

[Schmid 70] W. Schmid, On the realization of the discrete series of a semisimple Lie group, Rice Univ. Studies, **56** (1970), 99 – 108.

[Hotta] の項参照。

[Schmid 75] W. Schmid, On the characters of discrete series: the Hermitian symmetric case, Invent. Math., **30**(1975), 47 – 144.

W. Schmid, Two character identities for semisimple Lie groups, LNM, **587**(1977), 196 – 225.

[Schmid 91] W. Schmid, Construction and classification of irreducible Harish-Chandra modules, in *Harmonic analysis on reductive groups* (ed. W. Barker and P. Sally), pp. 235 – 275, Progress in Math. **101**, Birkhäuser, 1991.

ハムサンドウィッチ ([HMSW]) で扱った duality theorem をもっと洗練して Beilinson-Bernstein, Vogan-Zuckerman, Langlands-Knapp-Zuckerman のそれぞれの standard 表現間に旗多様体上の軌道を用いて幾何的な対応を付けたもの。[HMSW] では陰伏的であった Langlands の分類との関係がここでは明快に述べられている。また旗多様体上の $G_{\mathbb{R}}$ 軌道と $K_{\mathbb{C}}$ 軌道との対応もより具体的かつ直接的に述べられている。同じ論文集に収録されている Miličić の論文も参考にするとよい。

[Sekiguchi] 関口 次郎, 微分方程式の表現論への応用, 上智大学数学講究録, **27**, 1988.

この講究録では複素半単純 Lie 環の Verma 加群に対する Kazhdan-Lusztig の予想[33]が初歩的なことから丁寧に解説されている。 Verma 加群は言うまでもなく実半単純群における standard 加群に対応しておりその代数的理論を理解するにはうってつけの入門書と言えると思う。例えば $\mathfrak{D}_X$-加群 の基礎的な理論、Beilinson-Bernstein の定理の証明なども解説されている $\cdots$ とここまで書いておいて無責任な話だが、筆者は本書の内容をぱらぱらと見た程度なので大きなことは言えないのである。

[33]証明されてしまったので定理と言うべきであろうが、表現論だけをとってみてもほかにも Blattner 予想、Osborne 予想など、既に証明されているがなんとなく今までの行きがかり上「予想」と書いてしまうものがある。一方では予想と言われないで Fermat の定理と永年呼ばれてきたものがあるが、あれは Wiles の定理とはならないんでしょうね、やっぱり。

ただこの講究録の下敷きとなっているのは 1981 年に数理研で行われた柏原正樹による講義のノートであり、それには筆者も修士の一年目の講義として出席していた。柏原氏は確かこの講義を行っている間に突如として丸坊主になったりと大変にユニークなファッションをしていたように思う。講義の内容はと言えば、 Verma 加群などの表現論の代数的理論にはついていけたものの、 sheaf の導来圏の一般論あたりで落ちこぼれ (柏原氏の講義は非常に丁寧だったのだが)、いまや講師のファッションしか記憶に残っていないようなありさまで、やはり内容についてうんぬんする能力は持ち合わせていないのである。

[Tanisaki] 谷崎 俊之, 半単純リー群の表現と D 加群, 数学, **41**(1989), 126 – 139.

[Sekiguchi] では表現は Lie 環の代数的表現だけが扱われているが、この解説では群作用を伴う旗多様体上の $\mathfrak{D}_X$-加群 の理論を扱うことにより、 Lie 群の admissible 表現を扱うことが可能になっている。非常に簡潔に述べられており、見通しのよい解説になっていると思う。

ただ扱われているのはほとんどの場合複素半単純代数群とその主系列表現で実代数群の場合には方針のみが述べられている (といってもこの紙数では無理もないが)。堀田との共著で $\mathfrak{D}$-加群の本も近々発行されるようなのでそちらも興味を引かれる。

[Vogan 79] D. A. Vogan, Jr., The algebraic structure of the representation of semisimple Lie groups I, Ann. Math., **109** (1979), 1 – 60.

lowest K-type の理論を最初に打ちだした記念碑的な論文。しかしその内容はいまやほとんどが Green Book [greenbook] に含まれているので、そちらを参照するほうがよいだろう。

[greenbook] D. A. Vogan, *Representations of real reductive Lie groups*, Progress in Math. **15**, Birkhäuser, 1981.

長い間 Zuckerman の cohomological induction を扱ったただ一つの成書であった。もちろんこの本の目的はそれではなく、 lowest K-type を用いた既約認容表現の分類理論にある。手法は極めて代数的であり、極力解析的側面を排除した理論を構成している。結果的には $SL(2,\mathbb{R})$ の既約認容表現の完全な理解と quasisplit 群の極小放物型部分群に対する Langlands の理論 (この部分はある程度解析的にならざるをえない) を用いて、あとは cohomological induction さえあれば分類理論にたどり着けることが示されている。この本のエッセンスが Vogan [Vogan 85] に要約されているのでそちらも参考にするとよい。

[Vogan 85] D. A. Vogan, Jr., Classifying representations by lowest K-types, in *Applications of group theory in physics and mathematical physics* (ed. M. Flato, P. Sally and G. Zuckerman), pp. 269 – 288, Lectures in Applied Mathematics **21**, AMS, 1985.

Vogan の有名な Green Book [greenbook] の内容のエッセンスを具体例として $SL(2n,\mathbb{R})$ を用いて解説した論説。証明は一切付属していないが解説は丁寧であり特に $SL(2n,\mathbb{R})$ における具体的な計算は非常に参考になると思う。ただしここでは「結果」だけに注目して再構成されており、 Zuckerman の cohomological induction の理論とか Langlands の理論とかはきれいに切り捨てられている。むしろ筆者にはこの二つの理論を切り捨てて Green Book の内容 (といっても既約認容表現の分類理論の部分だけだが) がこうも簡潔にまとめられること自体が驚きであった。一読をお勧めする。

[darkgreenbook] N. R. Wallach, *Real reductive groups I*, Pure and Appl. Math. **132**, Academic Press, 1988.

簡約型リー群の認容表現に関する教科書。方向としては Vogan の Green Book に近く (奇しくもこの本も緑の本である) Zuckerman の cohomological induction が fundamental 表現 (= 離散系列あるいはそれに対応する fundamental カルタン部分群に台を持つ表現) の構成に本質的に用いられている。ただし Langlands の分類もまた本質的であり、ちょうど解析的理論 (表現要素の漸近挙動など) と代数的理論 (cohomological induction の理論など) の融和を図った内容となっている。また保型形式への応用なども扱われている。

[Warner] G. Warner, *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups, I*, Springer-Verlag, 1972.

G. Warner, *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups, II*, Springer-Verlag, 1972.

[Yamashita 90] H. Yamashita, Embeddings of discrete series into induced representations of semisimple Lie groups, I – General theory and the case of $SU(2,2)$ –, Japan. J. Math., **16** (1990), 31 – 95.

Schmid は G の離散系列表現を G/K のベクトルバンドル上のある微分方程式を満たす section の空間として実現した ([Schmid 70]) が、この論文ではその実現を用いて離散系列表現のいろいろな誘導表現への埋め込みを微分方程式によって決まるある特殊な関数の存在の問題に帰着している。とくにこの論文 [Yamashita 90] では (一般化された) 主系列表現への埋め込みを扱っていて、一般論の後 $G = SU(2,2)$ の場合に離散系列の主系列表現への埋め込みがすべて決定されている。離散系列の主な性質、実現についても丁寧に書かれており、絶好の入門になるだろう。織田、あるいは織田・宮崎の Whittaker 関数の計算はこの論文が基礎になっていると言ってよい。

[Yamashita 91] H. Yamashita, Embeddings of discrete series into induced representations of semisimple Lie groups, II – Generalized Whittaker models for $SU(2,2)$ –, J. Math. Kyoto Univ., **31** (1991), 543 – 571.

[Yamashita 90] では主系列表現への埋め込みを扱ったがこの論文 [Yamashita 91] では Gelfand-Graev 表現への埋め込みを扱っている。ここでも一般論の後、$G = SU(2,2)$ の場合に具体的な計算が実行されている。

[Zuckerman] G. Zuckerman, Tensor products of finite and infinite dimensional representations of semisimple Lie groups, Ann. of Math., **106**(1977), 295 – 308.

いわゆる Zuckerman の translation functor[34] を最初に定義した epoch making な論文。translation functor の性質は大域指標の代数的な計算から容易に導けるが、この論文ではその応用として離散系列表現の極限[35]の存在を証明している。その後この functor はルートの壁から十分離れた無限小指標に対して証明された定理を正則な無限小指標一般に拡張する際に必要不可欠となった。もちろん詳しい解析を行うことにより特異な無限小指標に対しても使用できるが、この場合には表現の消滅と生成の問題があり、一般に複雑である。

[34] 当時からこの呼称と表現あるいは指標の coherent continuation と言う用語が並列に用いられてきた。一方は functor としての側面を、もう一方は表現の family を扱うという側面を強調した用語になっている。

[35] 当時まだそのような表現の存在は「信じられている」状態で、確たる証明はなかった。

筆者は恩師である平井武先生の勧めによりこの論文を数学研究の一番最初に手にして、以後半単純群の表現論に深く関ることとなった。その意味で思い出深い論文の一つである (あまり論文の内容と関係なかったですね (笑))。